

UNIVERSITÉ TOULOUSE III - PAUL SABATIER

THÈSE

en vue de l'obtention du
DOCTORAT DE L'UNIVERSITÉ DE TOULOUSE
délivré par l'Université Toulouse III - Paul Sabatier

Discipline
PHYSIQUE DE L'ATMOSPHERE

présentée par

Matthieu PLU

REPRÉSENTATION NUMÉRIQUE ET MATHÉMATIQUE DES STRUCTURES MÉTÉOROLOGIQUES COHÉRENTES D'ÉCHELLE SYNOPTIQUE

*Thèse soutenue publiquement le 24 janvier 2008
à partir de 13h30 devant le jury :*

M. le professeur S. Chauzy	Président
M. le professeur H.C. Davies	Rapporteur
M. le professeur K. Schneider	Rapporteur
M. B. Legras	Examineur
Mme M. Farge	Examinatrice
M. A. Joly	Examineur
M. P. Arbogast	Directeur de thèse

en salle de conférence du
Centre National de Recherches Météorologiques
42 Av. G. Coriolis
31057 TOULOUSE Cedex, France
Météo-France, Unité GAME du CNRS, CNRM/GMAP/RECYF

Remerciements

Je tiens tout d'abord à remercier mes encadrants, Philippe Arbogast et Alain Joly d'avoir proposé un sujet de thèse aussi original et ambitieux, et de m'avoir fait confiance. Ce travail de thèse a pu aboutir grâce à leur rigueur, à la disponibilité dont ils ont su faire preuve, et à la pertinence des pistes et conseils qu'ils m'ont proposés au cours de ces années. Je souhaite aussi exprimer ma reconnaissance à la direction du Centre National de Recherches Météorologiques pour avoir soutenu le bon déroulement de cette thèse.

Je crois juste d'exprimer ma gratitude à mes professeurs de Classes Préparatoires aux Grandes Écoles pour m'avoir donné le goût pour la rigueur des travaux scientifiques, et pour m'avoir appris les indispensables connaissances scientifiques de base. Si je n'avais pas suivi leurs cours, la partie de cette thèse qui traite de l'orthogonalisation des structures n'existerait pas. Ou plutôt, sans eux, je n'aurais certainement jamais eu l'opportunité d'entreprendre une thèse.

La première phase de ce travail de thèse a nécessité de me familiariser avec la théorie des ondes. Je suis très reconnaissant à Jun-Ichi Yano pour l'aide qu'il m'a apportée à ce sujet. En outre, le soutien du Prof. Kai Schneider a été essentiel pour me former à l'utilisation des ondes en mécanique des fluides, afin que je puisse voler de mes propres ailes en les appliquant à des champs météorologiques. Je lui suis reconnaissant, ainsi qu'au Prof. Huw C. Davies, d'avoir accepté d'être les rapporteurs de cette thèse. Je remercie aussi M. Bernard Legras, Mme Marie Farge et le Prof. Serge Chauzy d'avoir accepté d'examiner le mémoire et de participer au jury de soutenance. Je souhaite enfin remercier Olivier Pannekoucke pour sa relecture du manuscrit et pour les améliorations qui en ont résulté.

Ces travaux ont aussi été le fruit de collaborations quotidiennes. Merci donc à tous les membres de l'équipe Recyf pour le soutien et l'aide qu'ils m'ont apportés, que ce soit pour compléter mes connaissances scientifiques, pour m'apprendre à utiliser les outils informatiques et de prévision numérique, ou pour les agréables conditions de vie quotidienne qu'ils savent entretenir. Mes travaux ont aussi bénéficié de l'expertise d'autres chercheurs du GMAP ; je ne les oublie pas. Remerciements spéciaux à Bruno Joly et Olivier Nuissier pour l'aimabilité qu'ils ont eue à me fournir leurs données et leur expertise concernant les épisodes fortement précipitants en Méditerranée.

Enfin, et à mes yeux le plus important, je suis profondément reconnaissant à Lydie de m'avoir soutenu tout au long de ces années, et surtout d'avoir supporté les derniers mois de cette thèse, pendant lesquels je n'ai pas été aussi disponible que je l'aurais souhaité. Il faut savoir que, la semaine où j'ai « accouché » du présent mémoire, elle a réalisé un travail autrement plus merveilleux en donnant naissance à notre fils Lilian.

Table des matières

Introduction	3
1 Structures cohérentes en météorologie synoptique : état de l'art et objectifs	7
1.1 Les modèles conceptuels de la cyclogenèse	7
1.1.1 Les anciennes approches	7
1.1.2 Les théories d'instabilité	9
1.1.3 Le développement barocline	13
1.1.4 L'importance du tourbillon potentiel	15
1.2 Structures cohérentes en mécanique des fluides	18
1.2.1 Quelques rappels sur la turbulence	18
1.2.2 Émergence de structures cohérentes en turbulence	20
1.2.3 Éléments de définition des structures cohérentes	21
1.2.4 Les structures cohérentes d'échelle synoptique sont-elles conformes à celles issues de la turbulence ?	22
1.3 Un tour d'horizon des méthodes d'extraction des structures cohérentes	26
1.3.1 Forme et traitement d'image	26
1.3.2 Les techniques utilisées en météorologie	27
1.4 Objectifs de l'extraction	28
1.4.1 Quelle extraction ?	28
1.4.2 Structures cohérentes et prévisibilité	29
2 Extraction des structures cohérentes par la transformée en ondelettes	33
2.1 Extraction du champ cohérent	33
2.1.1 La transformée en ondelettes	33
2.1.2 État de l'art en turbulence développée	45
2.1.3 Cadre d'étude météorologique	47
2.1.4 Étude de l'extraction sur des champs dynamiques météorologiques	48
2.2 Un algorithme d'extraction des structures cohérentes	58
2.2.1 Signature en ondelettes d'un monopole	58
2.2.2 Construction d'un algorithme d'extraction	72
2.2.3 Construction d'un ensemble de structures orthogonales	78
2.3 Améliorations possibles de l'algorithme	87

3	Premiers exemples d'application de l'algorithme à des phénomènes intenses	89
3.1	Environnement et perturbations synoptiques	89
3.1.1	Une nouvelle approche temporelle : la persistance	89
3.1.2	Une approche diagnostique de la cohérence d'une anomalie	93
3.1.3	Interprétation de la cohérence des structures	94
3.2	Étude du rôle d'un rapide de jet	97
3.2.1	Définition d'un rapide de jet	97
3.2.2	Extraction d'un rapide de jet	98
3.2.3	Rôle du rapide de jet sur le déclenchement de la tempête	103
3.3	Composites de structures à l'origine d'épisodes pluvieux Méditerranéens	106
3.3.1	Les cas d'étude	106
3.3.2	Densité et composites des structures	106
3.3.3	Analyse des structures par classe d'événement	109
4	Article : <i>A wavelet representation of synoptic-scale coherent structures</i>	113
5	Perspectives : structures cohérentes et prévisibilité	167
5.1	Prévision d'ensemble	167
5.1.1	Article publié : <i>A cyclogenesis evolving into two distinct scenarios and its implications for short-term ensemble forecasting</i>	167
5.1.2	Une contribution à la prévision d'ensemble des événements intenses d'échelle synoptique	183
5.1.3	Première mise en œuvre sur le cas de la cyclogénèse du 3 octobre 2006	186
5.1.4	Conclusion et perspectives	198
5.2	Assimilation d'images	199
	Conclusion	201
	Annexes	203
1.	Solitons et modons	203
2.	Test de normalité	205
3.	Orthogonalisation des structures : cas d'une matrice non inversible	206
	Bibliographie	218

Introduction

14 novembre 1854. Une tempête balaie la flotte Française en Mer Noire, ce qui motive la création d'un réseau coordonné d'observations météorologiques, afin de prévoir la survenue de ce type de phénomènes. On considère généralement ce moment comme étant l'acte de naissance de la météorologie moderne. 26 décembre 1999. Une tempête exceptionnelle, prévue tardivement par les services météorologiques Européens, dévaste une partie du Nord de l'Europe, dont la France et l'Allemagne. Bien que la connaissance et les techniques de prévision des tempêtes aient énormément progressé pendant le siècle et demi qui sépare ces deux dates, ces phénomènes continuent à être mal connus. La connaissance de la dynamique des systèmes dépressionnaires et de leur prévisibilité demeure donc un champ d'étude scientifique ouvert.

Les dépressions des latitudes moyennes sont une gamme d'objets particuliers dans la variabilité du système climatique terrestre. Il s'agit de tourbillons cycloniques d'échelle synoptique, soit de taille caractéristique comprise entre 500 km et 3000 km, qui se propagent aux latitudes tempérées, le plus souvent dans une région barocline de grande échelle. Une dépression se caractérise par des vents qui peuvent être plus ou moins forts, et par des précipitations.

Elles jouent un rôle important pour la régulation thermique de l'atmosphère en transportant une partie de la chaleur de l'Equateur aux Pôles. De plus, les ressources en eau sur les continents des latitudes moyennes sont alimentées en grande partie par les dépressions. C'est dire leur rôle d'importance pour le climat et les impacts sociétaux du changement climatique.

Parfois, les vents associés à une dépression peuvent être particulièrement violents ; alors celle-ci porte le nom de tempête. Au jour le jour, la prévision de la localisation et de la force de ces phénomènes dangereux constitue un objectif majeur d'un service météorologique. La prévision de l'intensité et de la trajectoire d'une tempête est véritablement un défi lancé aux prévisionnistes pour au moins deux raisons :

- les tempêtes ont des cycles d'évolution très variés, qui dépendent à la fois de leur environnement et de leur dynamique propre, ce qui fait que la connaissance des champs météorologiques à un instant ne permet pas à l'observateur humain de déterminer le futur de la tempête ;
- les écoulements donnant lieu à une tempête sont souvent fortement instables, dans le sens où une perturbation de faible amplitude peut y croître rapidement, et sensibles aux conditions initiales ; par conséquent la solution déterministe prévue par un modèle numérique est très souvent entâchée d'une erreur importante, issue de l'amplification de l'inévitable erreur initiale.

Ainsi, la dynamique des dépressions des latitudes moyennes est un sujet d'étude essentiel à la fois pour l'étude du climat et pour la prévision météorologique. Or, les mécanismes de formation et d'intensification des dépressions, qu'on appelle aussi *cyclogenèse*, sont encore mal compris.

Deux cadres théoriques distincts tentent d'expliquer la cyclogenèse. Le premier la considère comme la croissance linéaire de modes instables (Eady, 1949) ; le second comme le résultat de l'interaction non linéaires entre structures tourbillonnaires (Petterssen, 1955). Dans les deux cas des développements analytiques ou des solutions numériques peuvent être trouvées dans le modèle quasi-géostrophique. Cependant, aucun de ces deux cadres n'est complètement satisfaisant. Alors que les calculs d'instabilité fournissent une écriture mathématique élégante des perturbations d'échelle synoptique, ses résultats se confrontent difficilement aux dépressions observées dans l'atmosphère. De plus, elles font appel à l'hypothèse qu'il existe un état de base autour duquel évoluent des perturbations infinitésimales, ce qui est difficile à justifier dans le cadre réel des cyclogenèses observées. Le second cadre théorique, quant à lui, semble permettre de faire le lien entre simulations idéalisées des interactions et cas d'études observés. Cependant, il ne propose pas une définition objective et univoque des structures qui interagissent. Or, si on veut caractériser les interactions entre les structures elles-mêmes et avec leur environnement et établir des relations de cause à effet dans la dynamique, il est nécessaire de séparer le champ en un ensemble unique de structures. L'absence d'une définition objective et univoque des anomalies rend ce cadre théorique actuellement incomplet. L'objectif principal du présent travail est de rechercher une définition objective de ces objets dynamiques. Cette problématique est très liée à la définition des structures et de l'environnement dans lequel elles évoluent.

Les écoulements atmosphériques d'échelle synoptiques sont turbulents, et ont donc les propriétés d'un système thermodynamique hors d'équilibre, chaotique. Et si les structures tourbillonnaires à l'œuvre dans la cyclogenèse étaient des *structures cohérentes*, au sens donné par la turbulence ? Il s'agit en effet d'objets météorologiques se propageant et évoluant sur des constantes de temps assez longues. Si on suppose que l'écoulement atmosphérique est équilibré, ce qui est une hypothèse acceptable à l'échelle synoptique, alors le tourbillon potentiel suffit à exprimer l'ensemble de la dynamique adiabatique. Le présent travail se place ainsi dans la suite logique de l'application de l'inversion du tourbillon potentiel à l'étude des interactions non linéaires dans la cyclogenèse (Arbogast, 1998).

Le chapitre 1 propose un retour sur les théories de la cyclogenèse, en particulier sur les raffinements successifs des théories d'instabilité linéaires, et sur ses principaux défauts. Ensuite, afin d'aborder véritablement la problématique de la représentation des structures, on définit les structures de tourbillon potentiel recherchées, et on décrit le concept de structure cohérente tel qu'il est défini en turbulence. Une première comparaison des structures de tourbillon potentiel avec le concept de structure cohérente est ainsi proposé.

Puis, le chapitre 2 s'intéresse véritablement à l'extraction des structures cohérentes de tourbillon potentiel, grâce à la représentation des champs bidimensionnels sur une base d'ondelettes orthogonales ou à une représentation dérivée ayant les propriétés d'invariance par translation, la transformée en ondelettes stationnaires. L'application du filtrage non linéaire en ondelettes sur un champ de tourbillon potentiel permet de séparer l'ensemble des structures du champ incohérent, dont les propriétés statistiques sont décrites. Un algorithme d'extraction de chaque structure individuelle est ensuite bâti, qui permet de définir une structure par une collection de coefficients d'ondelettes appartenant à une même base orthogonale. Mais, la base n'est pas nécessairement la même pour chaque structure ; une technique d'orthogonalisation des structures entre elles est

donc mise en place, qui permet d'individualiser chaque structure et d'éviter la redondance entre les structures disjointes.

L'extraction est ensuite appliquée à quelques écoulements atmosphériques (chapitre 3). Un critère de cohérence est défini entre une structure extraite et la structure propagée par les équations du modèle atmosphérique dans lequel elles évoluent. Basé sur l'idée que l'environnement doit évoluer indépendamment des structures, ce critère permet d'évaluer la technique d'extraction.

L'extraction de la structure cohérente associée à un rapide de courant-jet lors d'une tempête exceptionnelle de Noël 1999 est ensuite effectuée grâce à l'algorithme en ondelette. L'inversion du tourbillon potentiel, après et avant suppression de la structure, offre une méthode d'évaluation de la sensibilité de la tempête à la force du courant-jet. Concernant une autre classe de phénomènes, des composites de structures d'altitude associées à un ensemble d'épisodes précipitants sur le Golfe du Lion sont calculés. Celles-ci sont localisées dans une région bien définies et la variabilité de leur forme et de leur intensité peut être documentée.

À part une meilleure compréhension des mécanismes de la cyclogenèse, l'algorithme d'extraction doit permettre de construire de nouveaux outils pour évaluer la prévisibilité des tempêtes. Le chapitre 5 s'intéresse à une méthode de perturbation des structures cohérentes initiales pour la génération d'une prévision d'ensemble. Cette technique tire partie de la forte sensibilité des tempêtes à la position et à l'amplitude des structures cohérentes de tourbillon potentiel. Elle est rendue possible grâce au caractère automatique de l'extraction. Dans un cadre idéalisé, on la compare avec une technique de prévision d'ensemble dont les perturbations initiales sont des vecteurs singuliers, ce qui est fait dans l'article paru (Plu et Arbogast, 2005) qui est joint.

Chapitre 1

Structures cohérentes en météorologie synoptique : état de l'art et objectifs

1.1 Les modèles conceptuels de la cyclogenèse

Une des principales questions qui animent les recherches en météorologie dynamique d'échelle synoptique est la suivante : comment expliquer l'existence et la croissance des tempêtes ? Bien qu'abordé depuis au moins 150 ans, ce problème n'est toujours pas résolu de façon satisfaisante. Les progrès théoriques et les améliorations des techniques de prévision se sont développés conjointement, en bénéficiant l'une de l'autre dans un aller-retour fructueux entre connaissance théorique et capacité technique.

1.1.1 Les anciennes approches

La première motivation pour une meilleure connaissance des tempêtes a été (et est toujours) d'être capable de les prévoir, en raison des dégâts provoqués par les vents et les pluies associés. L'étape initiale a été de pouvoir observer et mesurer les champs météorologiques qui sont liés à ces tempêtes. Après la découverte de la pression atmosphérique et l'invention du baromètre, le lien entre vent et pression a été observé, en particulier par les stations météorologiques pérennes (comme celle de Paris). Dès le XVIII^e siècle, on était capable à bord des navires de prévoir la force du vent à l'arrivée d'une tempête en fonction de la chute de pression du baromètre, grâce à des règles empiriques. Au XIX^e siècle, à partir des mesures de plusieurs stations en Europe, Buys-Ballot a énoncé la loi éponyme qui fait le lien entre champ de pression et champ de vent.

Les vents intenses d'une tempête sont ainsi associés à des basses pressions et leur force est proportionnelle au gradient de pression. Les sources de creusement du champ de pression ont alors été exploitées pour tenter d'expliquer la formation des tempêtes (par exemple la libération de chaleur latente, Espy, 1841). De la deuxième moitié du XIX^e siècle aux années 1920, le contraste thermique entre les régions tropicales et polaires retient l'attention. Margules (1903, 1906) examine l'hypothèse que les tempêtes puisent dans l'énergie potentielle de ces deux sources de chaleur comme le ferait une machine thermique. Les dépressions extratropicales joueraient ainsi un rôle de redistribution de chaleur de l'Équateur aux Pôles. Ces avancées se traduisent finalement par la théorie norvégienne (Bjerknes, 1919; Bjerknes et Solberg, 1922),

qui repose sur le modèle conceptuel de front polaire (Fig. 1.1), ligne de fort contraste thermique qui sépare les masses d'air tropicales et polaires. Les dépressions et fronts seraient le résultat d'instabilités sur cette surface de discontinuité entre deux fluides différents. Solberg (1928) (puis plus tard Orlanski, 1968), en considérant les équations de l'instabilité de surface (von Helmholtz, 1888), tente de formaliser mathématiquement les ondes du front polaire. Il obtient des longueurs d'onde typiques de l'ordre de 1000 à 2000 km, différentes des ondes longues (3000 à 6000 km) que le modèle du front polaire est censé décrire.

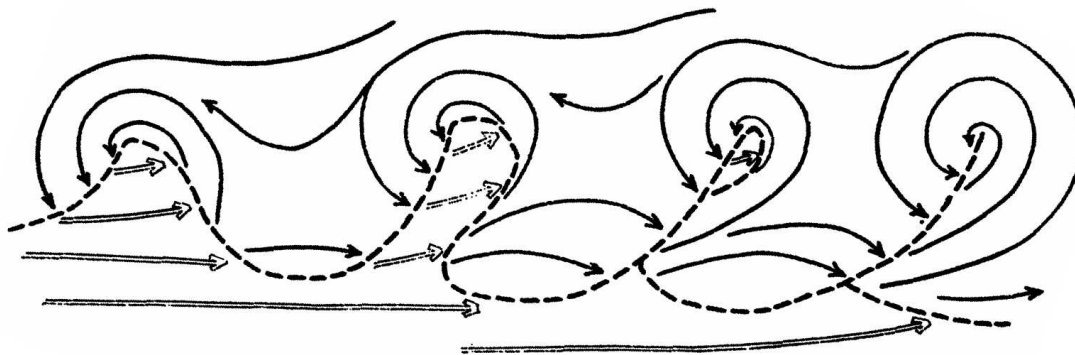


FIG. 1.1: Formation d'une dépression selon le modèle conceptuel du front polaire. D'après Bjerknes et Solberg (1922).

Malgré cet échec théorique, et bien que l'existence du front polaire n'a jamais été démontrée – il s'agit avant tout d'une commodité pratique –, la théorie norvégienne s'est révélée être un modèle puissant pour conceptualiser les systèmes dépressionnaires en l'absence d'une forte densité d'observations. Elle a été à la base de la prévision météorologique traditionnelle, faite au moyen de cartes synoptiques et de tracés à la main. Aujourd'hui encore, bien que le modèle du front polaire soit dépassé dans son ensemble, il demeure quelques concepts d'importance, en particulier l'existence de fronts associés à une dépression. La structure horizontale des fronts chauds et fronts froids (Bjerknes, 1919) est réaliste.

À partir des années 1930, la dynamique de la haute troposphère est examinée de plus près, ce qui renouvelle la vision de la cyclogenèse. D'un point de vue théorique, Rossby (1939) calcule les caractéristiques des grandes ondes atmosphériques qui peuvent se développer dans un courant zonal. Ce travail a lieu dans le cadre du modèle barotrope avec des variations linéaires du paramètre de Coriolis (effet β). Bjerknes (1937) et Sutcliffe (1939) montrent l'importance que peut jouer la dynamique en altitude pour le développement d'une dépression de surface. Parallèlement, on découvre l'existence de courants-jets, qui sont des tubes de vent forts situés aux latitudes moyennes, en dessous de la tropopause. En tirant partie des mesures de températures issues d'un ensemble de radiosondages épars, Bjerknes et al. (1933) furent les premiers à mettre en évidence un courant-jet. Cependant, ce sont surtout les aviateurs de la Seconde Guerre Mondiale traversant le Pacifique Nord qui observèrent véritablement ces couloirs de vent intense. Ainsi, il arrivait parfois qu'ils manquassent leur objectif de façon inexplicable, s'ils volaient dans un courant-jet. En 1945, des pilotes américains purent mesurer des vents supérieurs à 400 km/h

localement. Les courants-jets furent décrits plus en détail par la suite (Palmén et Newton, 1948; Riehl et Collaborators, 1952).

Ainsi, la découverte des courants-jets active des recherches théoriques sur le rôle de l'altitude pour la cyclogenèse, et en particulier sur l'importance du cisaillement vertical de vent. Conjointement aux débuts de la prévision numérique du temps (Charney et al., 1950), la prise en compte de la baroclinie donne lieu à de véritables théories physiques de la formation des tempêtes.

1.1.2 Les théories d'instabilité

Principe de l'instabilité

Les théories d'instabilité (Rayleigh, 1880), issues de la mécanique des fluides théorique, consistent à se donner un système d'équations et un état de base stationnaire pour ce système. En considérant des petites perturbations sur cet état de base, on peut linéariser le système d'équations. Soit l'évolution de la variable d'état \mathbf{U} par le système non linéaire \mathcal{A} :

$$\frac{d\mathbf{U}}{dt} = \mathcal{A}(\mathbf{U}) .$$

On suppose l'existence d'un état de base \mathbf{U}_m qui est stationnaire, donc $\mathcal{A}(\mathbf{U}_m) = \mathbf{0}$. La perturbation $\mathbf{u} = \mathbf{U} - \mathbf{U}_m$ est évoluée de façon linéaire au voisinage de \mathbf{U}_m par l'opérateur $\mathbf{A} = \frac{\partial \mathcal{A}}{\partial \mathbf{U}}$.

On cherche ainsi les solutions \mathbf{u} telles que

$$\frac{d\mathbf{u}}{dt} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{u} .$$

Dans la mesure où \mathbf{A} est autonome (Farrell et Ioannou, 1996a), la résolution analytique donne :

$$\mathbf{u}(t) = \mathbf{u}(0)e^{\mathbf{A}t} .$$

L'approche classique consiste à rechercher les modes normaux du système linéaire, qui sont les modes les plus instables pour les temps $t \rightarrow \infty$.

Les premiers modèles d'instabilité barocline

Les premières recherches de l'instabilité d'une atmosphère barocline reviennent à Charney (1947) et Eady (1949). En construisant un système d'équations filtré, proche du système quasi-géostrophique, et en choisissant un état de base barocline offrant un cisaillement vertical de vent, Charney (1947) montre l'existence d'ondes instables et d'autres stables, dont il caractérise partiellement les vitesses de phase et les taux de croissance, à partir de calculs numériques.

Indépendamment, Eady (1949) utilise un système très proche, qui possède une condition à la limite supérieure comme étant une surface rigide à la tropopause (où la vitesse verticale est nulle), et l'hypothèse f -plan : il s'agit du modèle de Eady. Ce modèle simplifié est résolu de façon analytique, dont les modes normaux ont la forme :

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}(0) \exp \left[i(\vec{k} \cdot \vec{x} - \omega t) \right] .$$

Ce sont donc des ondes (Fig. 1.2), caractérisées par leur taux de croissance (découlant de la partie imaginaire de ω) et leur vitesse de phase, constants dans le temps.

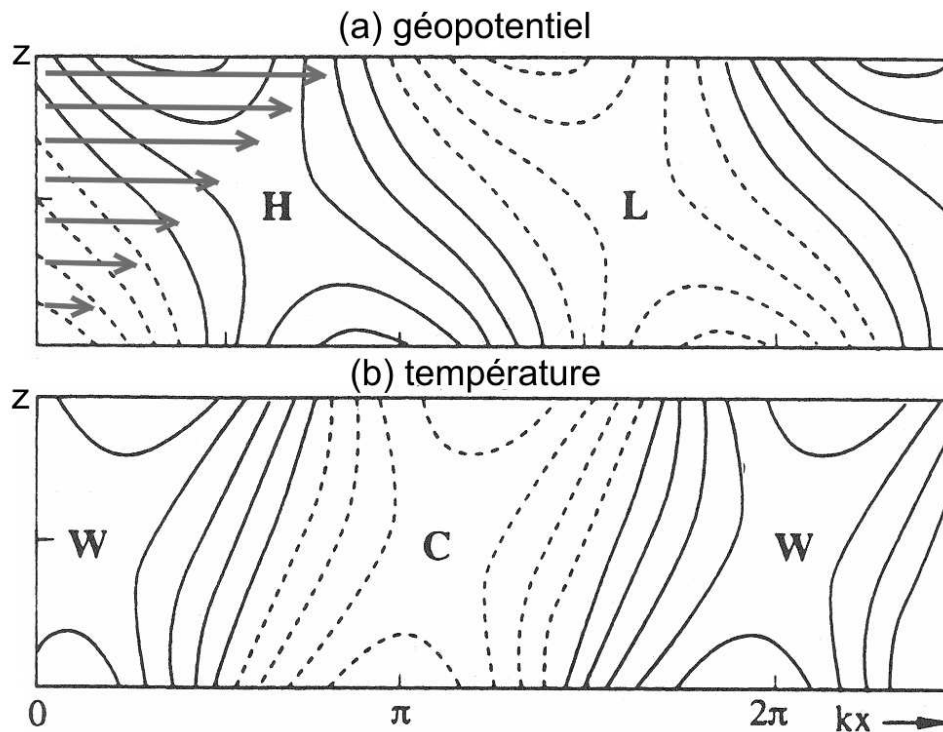


FIG. 1.2: Mode de Eady le plus instable, exprimé en géopotiel (en haut, H : zone de hautes pressions, L : zone dépressionnaire), et en température (en bas, C : froid, W : chaud). Le vent de l'état de base est représenté par des flèches grises. D'après Holton (1992).

Les critères de stabilité ainsi que les taux de croissance obtenus par le modèle de Eady sont réalistes. En particulier, il détermine une longueur d'onde minimale au-delà de laquelle il existe des modes instables. Le modèle de Eady est la base des modèles d'instabilité barocline. Les longueurs d'onde et vitesses de phase sont conformes aux ordres de grandeur des grandes dépressions des latitudes moyennes. Contrairement aux explications précédentes de la cyclogenèse, Charney et Eady en ont construit une véritable théorie, basée sur un formalisme mathématique. Ils ont mis en évidence un modèle et un état de base qui permettent la croissance de tempêtes dont la taille et la croissance donnent des ordres de grandeur compatibles avec l'observation.

Raffinements de l'instabilité barocline

Les modes normaux donnent lieu à des dépressions de grande longueur d'onde (4000 km environ), aux vitesses de phase assez lentes. Or les dépressions observées ont une variété importante en taille et en vitesse.

En particulier, certaines tempêtes explosives sont de petite échelle (inférieure à 1000 km) et ont des vitesses de déplacement rapides. Elles se développent dans le front associé à une

dépression de grande échelle (Fig. 1.3). Dans les observation comme dans le modèle semi-géostrophique (Hoskins et Bretherton, 1972), le front associé au mode normal est une véritable surface de discontinuité. Peut-on donc construire une théorie de l'instabilité frontale qui expliquerait la croissance de ces tempêtes de petite échelle dans un front de grande échelle ?

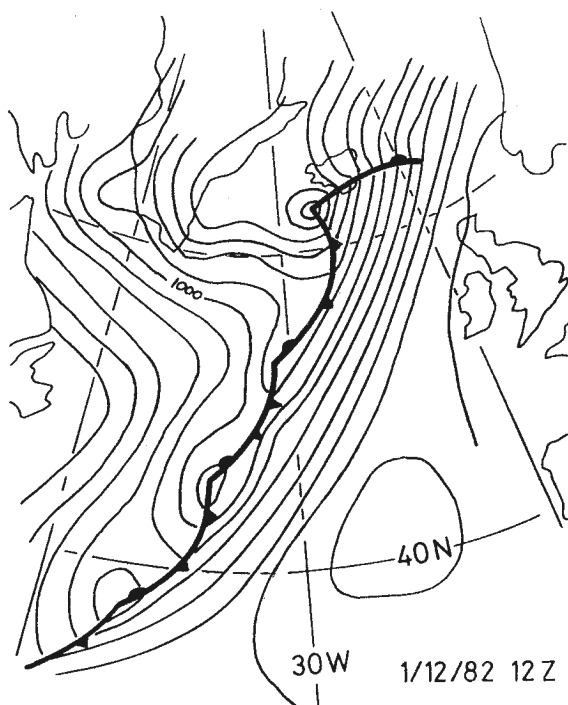


FIG. 1.3: Analyse de la pression réduite au niveau de la mer (intervalle 4 hPa) le 1^{er} décembre 1982 à 12 TU. Cette carte illustre une succession de dépressions de petite échelle (ondes frontales) qui se développent le long d'un front de grande échelle. D'après Joly et Thorpe (1990).

Les premiers travaux sur les instabilités frontales (Solberg, 1928; Orlanski, 1968) donnent des modes instables qui se comparent difficilement aux tempêtes observées. Des cadres plus réalistes sont alors explorés. Moore et Peltier (1987) dans un modèle à équations primitives et Schär et Davies (1990) dans un modèle semi-géostrophique à tourbillon potentiel uniforme, ont étudié l'instabilité de l'état quasi-stationnaire qu'est le front associé au mode normal le plus instable. On trouve effectivement des modes instables dont la longueur d'onde est de l'ordre de 1000 km et dont les taux de croissance sont supérieurs à ceux des modes normaux. Joly et Thorpe (1990) montrent que l'ajout d'une anomalie de tourbillon potentiel en basses couches, formée par exemple par la condensation associée à l'onde barocline de grande échelle, permet d'obtenir des croissances plus fortes. Un développement en deux phases est donc suggéré : d'abord la formation d'une anomalie de tourbillon potentiel par la condensation dans le front de grande échelle, puis la croissance de l'onde frontale dans cet environnement. Cependant, l'évolution non linéaire de l'onde se stabilise au bout de 24 h, et les gradients sont limités dans le cadre semi-géostrophique (Malardel et al., 1993).

L'instabilité généralisée

Par construction, le taux de croissance d'un mode normal est constant. Par conséquent, les phases de croissance explosive observées (Petterssen, 1955) ne peuvent pas être expliquées par

les modes normaux. De plus, un frottement faible dans le modèle de Eady réduit fortement les taux de croissance des modes normaux (Williams et Robinson, 1974; Farrell, 1985). À la recherche de perturbations transitoires fortement instables, Farrell (1989) propose une technique d'instabilité généralisée basée sur le calcul de modes optimisés sur un temps fini (Lacarra et Talagrand, 1988).

Étant donné l'état de base $\mathbf{U}_m(t)$, stationnaire ou non, on recherche les perturbations de faible amplitude $\mathbf{u}(t)$ qui croissent le plus vite entre les instants 0 et t . À cause de la non-stationnarité de $\mathbf{U}_m(t)$, l'opérateur linéaire $\mathbf{A}(t)$ est maintenant non autonome (Farrell et Ioannou, 1996b), et on a donc :

$$\frac{d\mathbf{u}}{dt} = \mathbf{A}(t) \cdot \mathbf{u} .$$

Entre les instants 0 et t , un propagateur linéaire $\Phi_{[0,t]}$ peut être défini, qui permet d'écrire (Farrell et Ioannou, 1996b) :

$$\mathbf{u}(t) = \Phi_{[0,t]} \mathbf{u}(0) .$$

La durée d'optimisation t étant fixée, on recherche donc les perturbations \mathbf{u} qui maximisent

$$\frac{\langle \mathbf{u}(t), \mathbf{u}(t) \rangle}{\langle \mathbf{u}(0), \mathbf{u}(0) \rangle} = \frac{\langle \Phi_{[0,t]} \mathbf{u}(0), \Phi_{[0,t]} \mathbf{u}(0) \rangle}{\langle \mathbf{u}(0), \mathbf{u}(0) \rangle} = \frac{\langle \Phi_{[0,t]} \Phi_{[0,t]}^* \mathbf{u}(0), \mathbf{u}(0) \rangle}{\langle \mathbf{u}(0), \mathbf{u}(0) \rangle} ,$$

où $\langle ., . \rangle$ désigne un produit scalaire et $*$ l'opérateur adjoint. Les solutions sont les vecteurs propres de $\Phi_{[0,t]} \Phi_{[0,t]}^*$ qui ont les valeurs propres maximales. On les appelle les modes singuliers du produit scalaire choisi. Ceux-ci ont des taux de croissance plus forts que les modes normaux (Farrell, 1989), qui se confrontent bien avec les taux observés.

La question de l'instabilité frontale généralisée a été examinée par Snyder et Joly (1998). Les perturbations obtenues ont des taux de croissance faibles, et leur structure dépend fortement du choix de la norme pour le calcul des vecteurs singuliers (Joly, 1995). Ceci est problématique, car il n'y a pas de raison objective de privilégier une norme par rapport aux autres pour la recherche de modes instables. Sur un cas observé, la comparaison de la tempête avec les modes singuliers les plus instables (Descamps et al., 2007), dans leur régime linéaire et non linéaire, révèle des dynamiques très différentes, en particulier en ce qui concerne l'évolution de leur structure. Ainsi, l'instabilité généralisée ne permet pas de bien reproduire la tempête étudiée.

Les déficiences des théories d'instabilité

En résumé, les théories d'instabilité peinent à reproduire correctement la dynamique des cyclogenèses. On a vu que la variété des échelles des dépressions, les taux de croissance les plus forts et les cycles d'évolution complexes sont difficilement interprétables par une quelconque théorie d'instabilité.

Il ne faut pas oublier que la recherche de modes instables repose sur deux hypothèses fortes.

La première est le caractère infinitésimal des perturbations, nécessaire à la linéarisation des équations. Par construction, un mode instable croît dans le régime linéaire, et il finit inévitablement par atteindre le régime non linéaire, où sa dynamique peut changer radicalement. Même si les cycles d'évolution semi-géostrophiques non linéaires des cyclogenèses sont bien représentés

par le mode normal le plus instable dans une première phase (Simmons et Hoskins, 1979; Schär et Wernli, 1993), la saturation non linéaire finit par jouer un rôle. Concernant les cyclogenèses frontales, Thorncroft et Hoskins (1990) montrent aussi l'importance de la prise en compte des non-linéarités pour leur développement. Encore plus problématique pour la défense des théories d'instabilité est la démonstration par Malardel et al. (1993) que les instabilités frontales de certaines longueurs d'onde sont très rapidement annulées par la dynamique non linéaire. En outre, les calculs linéaires ne peuvent pas prendre en compte correctement certains effets fortement non linéaires, en particulier les phénomènes à seuil.

La deuxième hypothèse derrière les calculs d'instabilité est la définition d'un état de base sur lequel évoluent les perturbations. Cette séparation est difficile à justifier rigoureusement dans le cas des dépressions observées. En permettant la prise en compte d'un état de base non stationnaire, l'instabilité généralisée est une avancée par rapport à l'instabilité modale. Il demeure cependant la nécessité de définir une trajectoire de référence autour de laquelle croissent les perturbations. Ce choix peut être arbitraire et rend difficile l'application de la théorie aux cas réels de cyclogenèses.

1.1.3 Le développement barocline

Au moment où les premières théories d'instabilité se répandaient, d'autres approches étaient développées en parallèle. Le concept de *développement barocline* a ainsi été mis en avant par des chercheurs ayant une vision plus proche de la réalité synoptique que de la modélisation mathématique. Bjerknes (1937) et Sutcliffe (1939) font le lien entre le creusement d'une dépression et la répartition de la divergence du vent dans la troposphère. Puis, ces résultats sont étendus par l'étude de l'équation de tendance de pression (Bjerknes et Holmboe, 1944). L'analyse de l'équation d'évolution de la vorticité (Sutcliffe, 1947) montre l'importance de la vitesse verticale pour l'évolution des noyaux de vorticité. L'amplification du tourbillon par la vitesse verticale (terme d'étirement) pose les bases du modèle du développement barocline. La confrontation des équations avec des cas réels de cyclogenèse valident ce mécanisme (Petterssen, 1956), et montre aussi la nécessité de prendre en compte des noyaux de tourbillon d'amplitude finie (Petterssen, 1955), contrairement aux perturbations infinitésimales des théories d'instabilité.

Petterssen et Smebye (1971) proposent ainsi deux types de développement des cyclogenèses. Les dépressions de type A s'amplifient progressivement dans une zone barocline ; elles ont un comportement proche des modes instables. Les dépressions de type B se développent lorsqu'un tourbillon préexistant en altitude, un précurseur, vient interagir avec une zone barocline de basses couches. Depuis l'étude de Sanders (1986), il est accepté que la plupart des dépressions sont initiées par un tel tourbillon d'altitude. La plupart des bombes météorologiques (Sanders et Gyakum, 1980) en particulier sont de type B. Une longue climatologie (15 hivers) des phases de maturation des dépressions montrent que les cyclogenèses qui se creusent le plus vite associent un noyau de vorticité en altitude (Ayrault et Joly, 2000).

Ainsi, la plupart des cyclogenèses sont le résultat de l'interaction entre un noyau de vorticité situé à la tropopause et en basses couches, dans un environnement barocline matérialisé par un courant-jet (Fig. 1.4). Ces tourbillons peuvent porter le nom d'*anomalie*, ou de *structure cohérente*. Leurs interactions impliquent de fortes non-l  narit  s. Des études idéalisées de cyclo-

génèses mettant en jeu des structures d'amplitude finie (Takayabu, 1991; Schär et Wernli, 1993) ont permis de mieux décrire les mécanismes d'interaction. Takayabu (1991) a montré l'importance de la position des tourbillons pour le développement barocline.

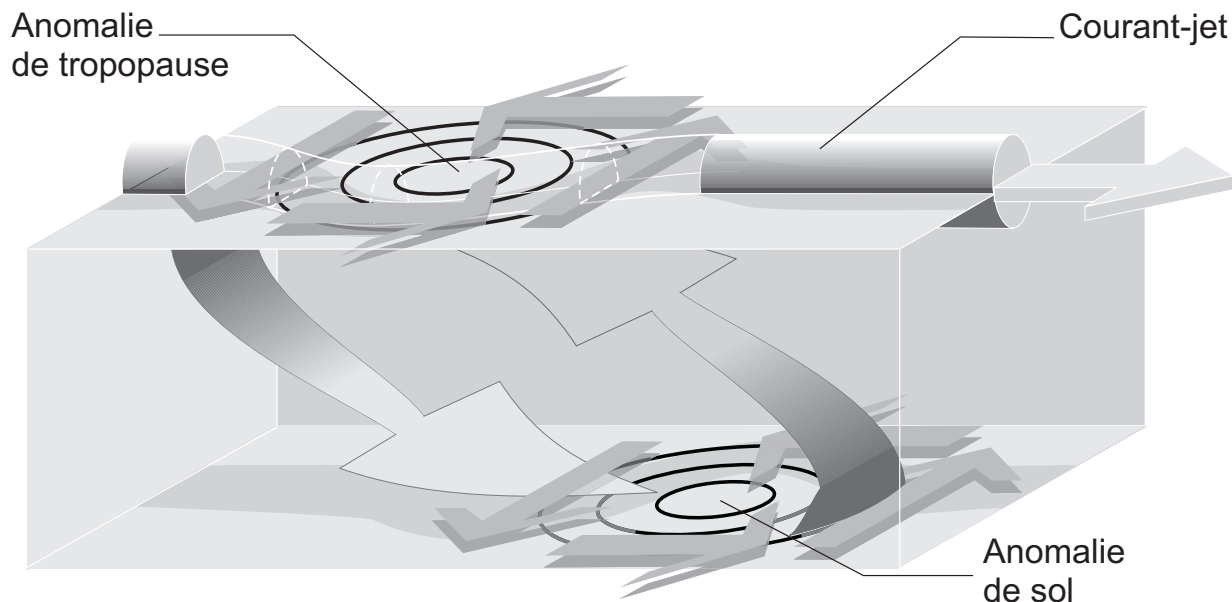


FIG. 1.4: Représentation idéalisée de l'interaction barocline entre un tourbillon au sol et un tourbillon à la tropopause dans un courant-jet rectiligne (figure A. Joly). L'interaction entre les deux structures se matérialise par une vitesse verticale importante.

L'interaction barocline met donc implicitement en jeu la notion de structure cohérente tourbillonnaire plutôt que la notion d'onde qui prévaut dans les théories d'instabilité. L'élégance de l'écriture mathématique est certainement la raison du succès des théories d'instabilité linéaire. On peut calculer analytiquement les vitesses de phase, les taux d'amplification des modes, alors que l'étude théorique similaire des structures tourbillonnaires ne permet pas un développement mathématique aussi rigoureux. Les études linéaires permettent de reproduire l'ordre de grandeur des échelles en jeu dans la formation des dépressions extratropicales, de s'approcher de taux de croissance réalistes, cependant elles ne peuvent pas expliquer leurs cycles d'évolution complexes, marqués par des taux de croissance variant dans le temps, des phases de décroissance puis de réactivation. Ces cycles de vie sont connus des synopticiens, et ils ont été mis en évidence lors de la campagne FASTEX, en 1997, sur l'Atlantique Nord (Joly et al., 1999). Ils ont été rendus objectifs par la classification automatique des dépressions sur les hivers de la période 1979-1993 (source : réanalyses ERA15) sur le même bassin (Ayrault, 1998; Ayrault et Joly, 2000). De plus, l'hypothèse d'amplitude infinitésimale des modes est fortement remise en cause pour la cyclogenèse, en particulier pour celles qui se creusent le plus rapidement. C'est pourquoi il est souhaitable de se dispenser de cette hypothèse.

Pour tenter de construire une théorie de la cyclogenèse suffisamment proche des observations, la notion de structure d'amplitude finie devra donc être considérée comme l'objet à représenter, plutôt que l'onde. Cependant, comme le remarque Takayabu (1991), il manque

un modèle mathématique pour représenter ces structures. La définition multivariée de l'état atmosphérique font qu'elles doivent de plus être définies par un ou plusieurs champs bien choisis.

1.1.4 L'importance du tourbillon potentiel

Jusqu'ici, il n'a été question que de tourbillon relatif car d'une part il est lié à la force du vent, et d'autre part, il est le champ sur lequel agit directement le terme d'étirement par la vitesse verticale dans l'interaction barocline. En outre, le tourbillon relatif est le champ classiquement utilisé en turbulence pour l'étude des structures cohérentes bidimensionnelles, dans une dynamique barotrope. Mais dès lors qu'on s'intéresse à un fluide géophysique stratifié verticalement, il est préférable de considérer un champ de tourbillon potentiel (Rossby, 1940) qui se conserve au cours du temps. Dans l'atmosphère évoluant par les équations primitives sèches, le tourbillon potentiel d'Ertel (1942) est effectivement un invariant lagrangien le long de toute trajectoire adiabatique sans frottement. Le tourbillon potentiel d'Ertel est toujours positif, voire légèrement négatif. Ses valeurs s'expriment en pvu (*potential-vorticity unit*, équivalent à $10^{-6} \text{ m}^2 \text{ s}^{-1} \text{ K kg}^{-1}$).

Kleinschmidt (1950a,b, 1951) a montré l'existence des structures d'altitude de tourbillon potentiel lors du développement des dépressions extratropicales. La stratosphère joue un rôle de « réservoir » de tourbillon potentiel qui peut nourrir les structures d'altitude. Une autre source de tourbillon potentiel, celle-ci prépondérante en basses couches, est due aux précipitations. Les précurseurs de cyclogenèse en tourbillon potentiel seront toujours définis par un noyau central positif, qui peut être entouré de pôles négatifs.

Le tourbillon potentiel a l'avantage d'être inversible s'il existe une relation d'équilibre entre les champs de masse et de mouvement. Ce principe d'inversibilité trouve une première application dans les travaux de Kleinschmidt (1950b), même s'il a été depuis repris et étendu par Hoskins et al. (1985). L'inversion du tourbillon potentiel (Arbogast, 1998) permet de déterminer, à partir d'une distribution tridimensionnelle de tourbillon potentiel et de conditions à la limite exprimées en température ou géopotentiel sur une surface, les champs de température, vent et géopotentiel associés.

Le résultat dépend de la relation d'équilibre (*balance* en anglais). L'équilibre quasi-géostrophique est valide pour les plus grandes échelles et hors des zones frontales ; son avantage est que l'inversion est alors un opérateur linéaire. La condition d'équilibre non linéaire de Charney (1955) permet d'inverser le tourbillon potentiel d'Ertel en étant valide à des échelles plus petites. En général, l'atmosphère est supposée sèche : le champ de vapeur d'eau n'est pas pris en compte. Bien que celui-ci puisse modifier la condition d'équilibre (Schubert et al., 2001), il n'existe pas de principe d'inversion satisfaisant dans une atmosphère humide. L'inversion utilisée actuellement dans le cadre du modèle ARPÈGE¹ repose sur une condition d'équilibre implicite (Arbogast et al., 2008). Contrairement aux autres relations d'équilibre, le filtrage des ondes rapides ne se fait pas par une troncature des échelles mais par un filtre temporel autour de l'instant de l'inversion. On s'appuie sur l'« initialisation dynamique » qui, après avoir utilisé des méthodes de stationnarisation des modes normaux rapides (Machenhauer, 1977), emploie désormais des

¹Il s'agit du modèle météorologique global, à équations primitives et hydrostatique, opérationnel à MÉTÉO-FRANCE (Courtier et al., 1991)

filtres digitaux (Lynch, 1985; Lynch et al., 1997). On obtient ainsi un état initial qui est proche de l'équilibre et cohérent avec la dynamique lente du modèle.

L'outil d'inversion permet de mieux comprendre le rôle des structures de tourbillon potentiel pour la dynamique d'échelle synoptique. Après modification ou suppression de certaines structures (Davis et Emanuel, 1991; Hakim et al., 1995), on peut effectuer des simulations numériques et diagnostiquer les différences dans les champs dynamiques. Ainsi, sur un ensemble de dépressions de la campagne FASTEX, Chaigne et Arbogast (2000) montrent la sensibilité de la cyclogenèse à des précurseurs d'altitude. Le mécanisme d'interaction entre une structure de tourbillon potentiel d'altitude et une zone barocline de basses couches (Hoskins et al., 1985, voir aussi la Fig. 1.5) est ainsi mis en évidence.

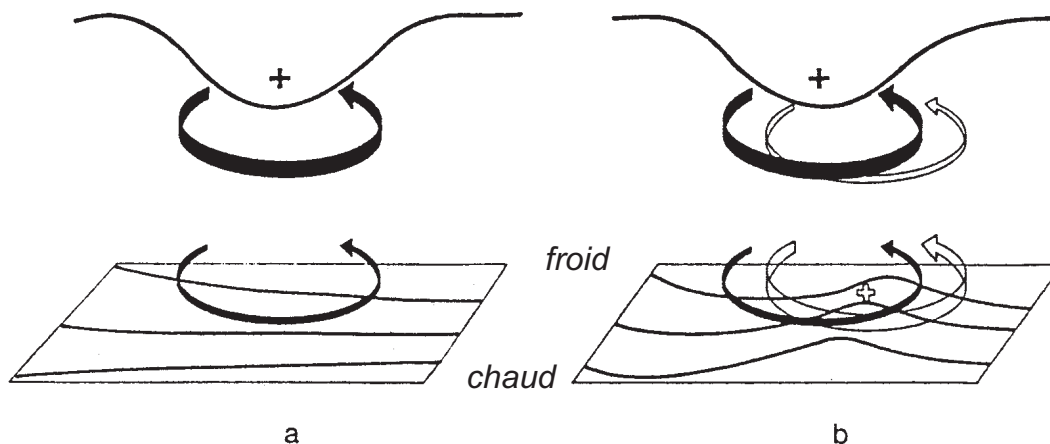


FIG. 1.5: Illustration de l'action à distance d'une anomalie de tourbillon potentiel en altitude dans une région barocline. Initialement (a), le tourbillon potentiel en altitude induit un tourbillon en basses couches. Ensuite (b), l'interaction barocline amplifie la cyclogenèse. D'après Hoskins et al. (1985).

Cependant, la richesse des interactions entre structures de tourbillon potentiel demeure méconnue. En basses couches, Arbogast (2004) montre l'amplification d'un noyau de tourbillon par l'action d'une structure de tourbillon potentiel sur un front. Le mécanisme ici s'explique par une interaction non linéaire barotrope. Un autre exemple à étudier serait l'interaction entre une structure tourbillonnaire et la sortie ou l'entrée d'un courant-jet, qui sont connues pour être des régions favorables de cyclogenèse (Ayrault, 1998).

Ainsi, l'inversion du tourbillon potentiel fournit un moyen de diagnostiquer les interactions entre différentes structures de l'atmosphère. Conservation lagrangienne, inversibilité et existence de structures en tourbillon potentiel sont les trois principes qui justifient la recherche des structures en interaction dans le champ de tourbillon potentiel. Néanmoins, si on souhaite construire une théorie complète de la cyclogenèse qui permette de caractériser les interactions non linéaires entre les structures, il est nécessaire de disposer d'une technique objective de décomposition du champ en anomalies. Actuellement, la détermination des anomalies fait appel à des méthodes dont les paramètres sont adaptés à chaque cas d'étude, ce qui rend la généralisation délicate. Par exemple, Davis et Emanuel (1991) extraient une anomalie du champ haute-fréquence filtré

temporellement, tandis que Chaigne et Arbogast (2000) le font dans le champ de petite échelle horizontale. De plus, le rayon de l'anomalie est déterminé « à l'œil » (Fig. 1.6). Il est donc nécessaire de rendre objectif la définition des structures de tourbillon potentiel.

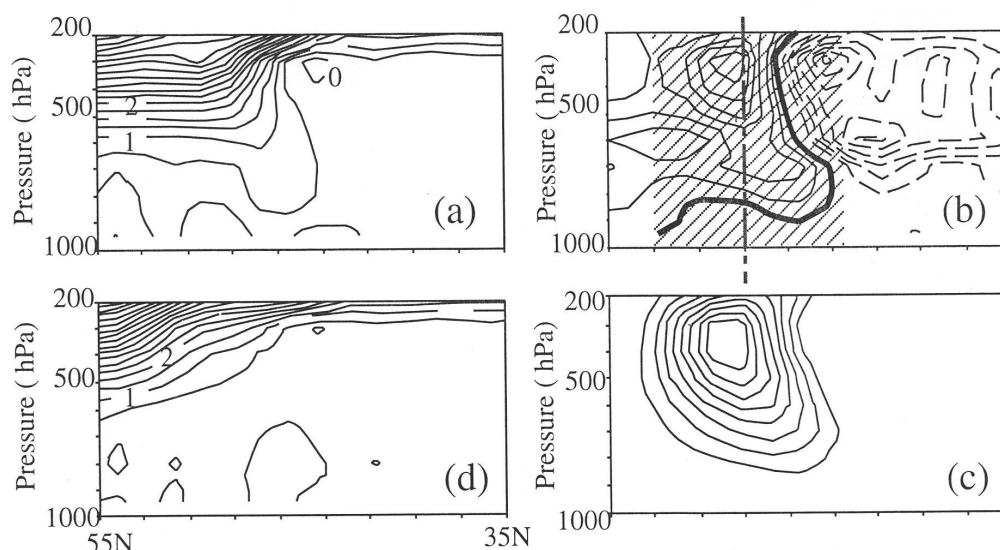


FIG. 1.6: Exemple de suppression d'une anomalie de tourbillon potentiel (intervalle 1 p.u.), vue par une coupe verticale. Du champ non modifié (a), on extrait la partie de plus petite échelle spatiale (b). Dans ce champ, l'anomalie est déterminée comme étant l'ensemble des valeurs positives du champ dans la région hachurée, dont le centre et le rayon sont définis de façon subjective. L'anomalie (c), et le champ après suppression de l'anomalie (d) sont montrés en bas. D'après Chaigne et Arbogast (2000).

Du fait du caractère non linéaire de l'opérateur d'inversion, il n'y a pas *a priori* de définition unique des champs dynamiques associés à chaque structure. Il s'agit du problème de l'*attribution* (Davis, 1992). Or, la méthode d'inversion généralisée est un processus non linéaire, contrairement à l'opérateur d'inversion quasi-géostrophique. Cependant, si on sait déterminer de façon objective les structures de tourbillon potentiel, l'attribution peut être résolue. En effet, on peut considérer que les champs attribués à une anomalie sont la différence entre les champs inversés avec anomalie moins les champs inversés sans anomalie. L'anomalie étant définie de façon univoque, on peut ainsi lui attribuer ses champs dynamiques de façon unique. Dans ce cadre, l'attribution en présence de plusieurs anomalies pose aussi problème, ce qui ne sera pas abordé ici.

On comprend ainsi l'intérêt d'une méthode d'extraction des anomalies pour analyser les interactions à l'œuvre dans la dynamique d'échelle synoptique. On se situe ici dans la continuité des travaux sur l'inversion du tourbillon potentiel (Arbogast, 1998). Une voie de recherche pertinente pour l'extraction objective des structures de tourbillon potentiel pourrait venir de la définition des structures cohérentes en mécanique des fluides. Pour cela, il faut vérifier que les anomalies de tourbillon potentiel qui sont recherchées correspondent effectivement à des structures cohérentes.

1.2 Structures cohérentes en mécanique des fluides

1.2.1 Quelques rappels sur la turbulence

On considère un écoulement soumis à un forçage à la vitesse U , de taille caractéristique h et à la viscosité cinématique ν . Le nombre de Reynolds de l'écoulement s'écrit :

$$Re = \frac{Uh}{\nu},$$

qu'on peut interpréter comme le rapport entre les forces d'inertie et les forces visqueuses.

L'expérience montre que la valeur du nombre de Reynolds détermine le type d'écoulement. Si le nombre de Reynolds est nul, le fluide est en équilibre. En augmentant progressivement Re (en augmentant le forçage), on met en évidence l'existence de valeurs critiques de Re pour lesquelles l'écoulement change de comportement. Si Re est proche de 0, l'écoulement est laminaire et caractérisé par des lignes de courant stationnaires dans le temps. Au-delà d'une valeur critique Re^{c1} , les lignes de courant se déforment et fluctuent dans le temps de façon périodique. Puis, l'augmentation de Re au-delà de la valeur Re^{c1} entraîne une modulation des fréquences, l'écoulement devenant quasi-périodique à deux modes. Enfin, si Re dépasse la dernière valeur critique Re^{c2} , le fluide devient turbulent et non périodique : il est impossible de déterminer des fréquences d'oscillation. La dynamique est alors chaotique et incohérente.

L'interprétation mathématique des transitions vers la turbulence a été d'abord vue comme l'augmentation jusqu'à l'infini du nombre de fréquences d'oscillations de l'écoulement (Landau, 1944). Depuis les années 1970, on sait qu'il suffit de trois fréquences pour avoir un régime chaotique (Ruelle et Takens, 1971; Newhouse et al., 1978). Un écoulement turbulent est ainsi caractérisé par un comportement chaotique, au sens mathématique du terme. Par conséquent, la description de la turbulence est un travail difficile et forcément incomplet avec nos connaissances actuelles.

Kolmogorov (1941) et Obukhov (1941) ont émis un certain nombre d'hypothèses simples et en ont déduit des propriétés statistiques universelles de la turbulence. Ces propriétés s'écrivent sous la forme de bilan énergétique ; il faut donc commencer par rappeler quelques définitions à ce sujet. On considère un écoulement tridimensionnel incompressible turbulent. L'énergie cinétique du système à l'instant t dans le domaine \mathcal{D} est définie par :

$$\mathcal{E}(t) = \frac{1}{2} \iiint_{\mathcal{D}} \vec{u}^2(x, y, z, t) dx dy dz = \int_0^\infty E(k, t) dk,$$

où $E(k, t)$ est la densité spectrale d'énergie (isotrope) à l'instant t et k le nombre d'onde.

La décroissance instantanée d'énergie cinétique du système s'écrit

$$\bar{\varepsilon} = -\frac{d\mathcal{E}}{dt}.$$

Pour un écoulement à nombre de Reynolds suffisamment fort, Kolmogorov (1941) suppose :

- l'hypothèse d'isotropie locale : les mouvements d'agitation de petite échelle sont statistiquement isotropes ;

- la *première hypothèse de similitude* : les propriétés statistiques de l'agitation à petite échelle sont en équilibre universel et ne dépendent que de la viscosité et du taux de dissipation ;
- la *seconde hypothèse de similitude* : il existe une plage spectrale (le sous-domaine inertiel) où les propriétés statistiques de la turbulence sont indépendantes de la viscosité.

De l'analyse dimensionnelle des variables E , $\bar{\epsilon}$ et k découle la relation :

$$E(k, t) = C_k \bar{\epsilon}(t)^{2/3} k^{-5/3} ,$$

dans le sous-domaine inertiel, avec $C_k \simeq 1,5$ constante de Kolmogorov.

Les propriétés statistiques de la turbulence tridimensionnelle développée et en équilibre avec ses sources peuvent être résumées par la densité d'énergie spectrale tracée sur une échelle logarithmique (Fig. 1.7).

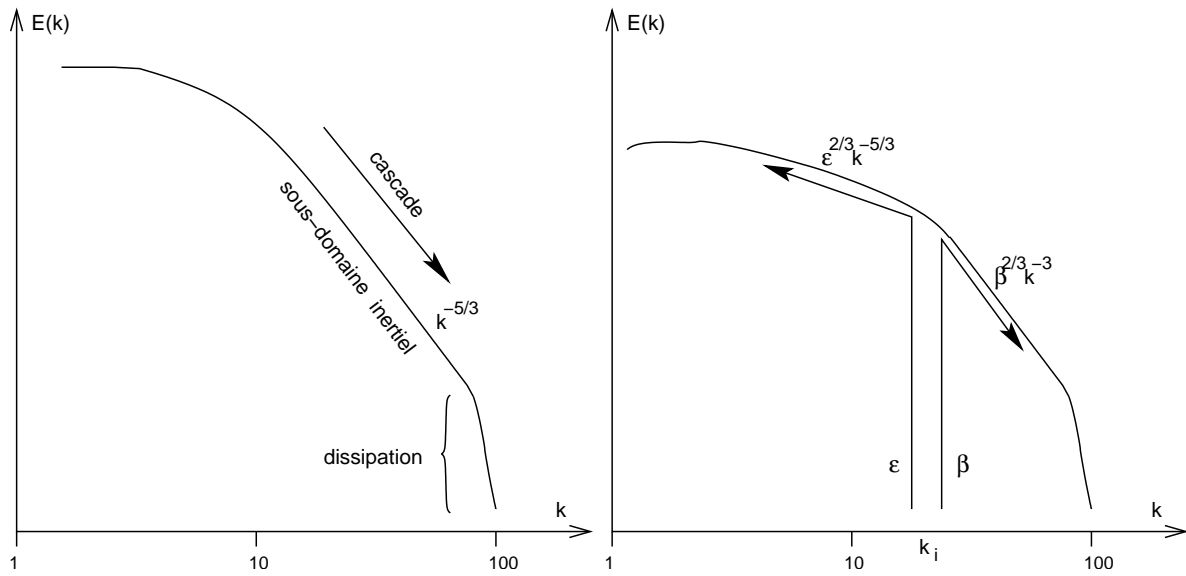


FIG. 1.7: Densité spectrale d'énergie (échelle logarithmique) d'un écoulement turbulent tridimensionnel (à gauche) et bidimensionnel (à droite). Dans le cas tridimensionnel, la cascade d'énergie a pour pente $-5/3$. Dans le cas bidimensionnel, la cascade d'énergie va vers les grandes échelles, la cascade d'ensrophie vers les petites échelles.

Même si le lien entre la cascade de Kolmogorov et les équations de Navier-Stokes n'a jamais pu être démontré, de nombreux travaux expérimentaux ont montré qu'elle est une propriété universelle des écoulements turbulents. En météorologie en particulier, des mesures l'ont validée en couche limite.

En ce qui concerne la turbulence dans un domaine bidimensionnel, ses propriétés sont radicalement différentes. Comme l'énergie cinétique, on définit l'ensrophie sur le domaine \mathcal{S} par :

$$\mathcal{F}(t) = \iint_{\mathcal{S}} \zeta^2(x, y, t) dx dy = \int_0^\infty F(k, t) dk ,$$

où $\zeta = -\partial u/\partial y + \partial v/\partial x$ est la vorticité. La décroissance d'ensrophie s'écrit

$$\bar{\eta} = -\frac{d\mathcal{F}}{dt}.$$

L'analyse dimensionnelle montre un sous-domaine inertiel, s'il existe, de la forme (Kraichnan, 1967; Leith, 1968; Batchelor, 1969) :

$$E(k, t) \propto \bar{\eta}(t) k^{-3}.$$

La cascade est donc plus pentue. En outre l'énergie a tendance à se concentrer dans les grandes échelles tandis que l'ensrophie se dissipe aux petites échelles par viscosité. Il y a donc deux cascades : une cascade directe d'ensrophie, et une cascade inverse d'énergie. Il est possible de quantifier ces cascades dans le cadre de la turbulence forcée.

Si on injecte un flux stationnaire d'énergie ε et d'ensrophie β au voisinage du nombre d'onde k_i , ce qui est équivalent à un forçage externe au système, on obtient une densité spectrale d'énergie présentant deux cascades (fig. 1.7). La cascade directe d'ensrophie s'écrit $E(k) \propto \beta^{2/3} k^{-3}$ et la cascade inverse $E(k) \propto \varepsilon^{2/3} k^{-5/3}$. Ce schéma permet aussi d'illustrer les transferts énergétiques dans un écoulement constitué d'une composante moyenne (au sens de Reynolds). Dans ce cas, c'est l'écoulement moyen qui injecte de l'énergie et de l'ensrophie dans sa gamme d'échelle caractéristique. L'écoulement turbulent redistribue l'ensrophie suivant la cascade avant de la dissiper. Les propriétés de la turbulence quasi-géostrophique seront rappelées dans la section 1.2.4.

Les descriptions statistiques de la turbulence énoncées jusqu'ici mettent en avant son caractère homogène et isotrope. Cette vision suppose que les termes de mélange de la vorticité génèrent un chaos où il n'existe pas d'échelle différenciée où l'écoulement pourrait s'organiser. Or, les expériences en laboratoire (dès les années 1950) et les simulations numériques (à partir des années 1970) ont mis en évidence l'existence de motifs persistants de grande échelle dans l'écoulement, que l'on a appelés *structures cohérentes*.

1.2.2 Émergence de structures cohérentes en turbulence

McWilliams (1984) analyse la formation et la persistance des structures cohérentes dans le modèle barotrope quasi-géostrophique, bidimensionnel plan, défini par les équations :

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + J(\psi, \zeta) = -\nu_0 \zeta + \nu_2 \nabla^2 \zeta - \nu_4 \nabla^4 \zeta, \quad (1.1)$$

$$\zeta = \nabla^2 \psi, \quad u = -\frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad v = \frac{\partial \psi}{\partial x}.$$

ψ est la fonction de courant, ζ la vorticité, (u, v) le champ de vitesse et J le déterminant du Jacobien, qui représente le terme d'advection de la vorticité. Plusieurs implémentations de la viscosité sont possibles : frottement ν_0 , viscosité ν_2 ou hyperviscosité ν_4 . L'énergie cinétique et l'ensrophie du système se conservent par les équations sans viscosité.

Dans le cadre simple où $v_0 = v_2 = 0$, McWilliams (1984) simule l'évolution libre d'un écoulement à partir d'un état initial aléatoire Gaussien dont la densité spectrale d'énergie suit une cascade en k^{-3} . Il montre :

- qu'après une phase de décroissance rapide, l'énergie demeure importante en diminuant très lentement alors que l'ensrophie tend vers 0 ;
- que la densité spectrale d'énergie accentue rapidement sa pente en passant de k^{-3} à k^{-5} ;
- que le champ de vorticité devient non Gaussien ;
- l'apparition de structures tourbillonnaires persistantes dont l'échelle croît au cours du temps : les structures cohérentes.

L'existence des structures cohérentes modifie les caractéristiques du champ turbulent, en particulier sa cascade énergétique et son caractère Gaussien. La croissance de ces structures se fait par fusion successive de noyaux de vorticité de même signe. Ce comportement, validé théoriquement par Robert et Sommeria (1991), est cohérent avec la cascade bidimensionnelle (Fig. 1.7) : l'énergie cinétique reste piégée dans les grands tourbillons, tandis que l'ensrophie décroît en étant dissipée par les phénomènes de petite échelle. L'émergence et l'existence de structures cohérentes est une propriété générale des systèmes dynamiques hors d'équilibre.

Ces structures cohérentes sont monopolaires, stables (Leith, 1984), et si elles sont situées suffisamment loin de toute autre structure, elles deviennent axisymétriques. L'écoulement autour des structures demeure chaotique. McWilliams (1984) conclut sur des éléments qui montrent l'importance des structures cohérentes dans les écoulements turbulents :

- l'écoulement peut être séparé en une *partie cohérente* (les structures) et une *partie incohérente* ;
- la dynamique est alors pilotée par les interactions entre les structures cohérentes d'une part, et entre le champ turbulent et le champ cohérent d'autre part ;
- le nombre de degrés de liberté du système serait alors fortement réduit par cette approche, ce qui ouvre des perspectives en modélisation numérique et en étude de la prévisibilité.

Farge et al. (1999) se situent exactement dans la continuité de ces idées, et ils ont appliqué aux champs turbulents les outils numériques qui rendent possibles l'extraction de l'ensemble des structures cohérentes. Si on est capable d'effectuer la séparation entre le champ cohérent et le champ incohérent, Gaussien, il est alors possible de simuler directement l'évolution des structures cohérentes (en faible nombre) et de simuler de façon statistique les interactions entre elles et le champ incohérent. La méthode de modélisation *Coherent vortex simulation* (Farge et al., 1999) a été mise en place selon ce principe. Elle permet de simuler des écoulements turbulents avec un coût de calcul réduit.

L'importance des structures cohérentes pour l'évolution des fluides turbulents, en tant que sujet d'étude et pour sa modélisation, a ainsi été montrée. Pourtant, l'explosion de ce thème en mécanique des fluides à partir des années 1970 a été peu suivi en météorologie synoptique.

1.2.3 Éléments de définition des structures cohérentes

Cette partie s'inspire de la vision d'ensemble des structures cohérentes en mécanique des fluides, proposée par Chassaing (2000, Chap. 7).

De nombreuses définitions des structures cohérentes ont existé au cours de leur histoire, selon le type d'écoulement dans lequel elles évoluent. Cependant, Chassaing (2000) dégage des caractéristiques essentielles. Une première approche fait appel à la notion de cohérence statistique. L'autocorrélation spatiale à des distances importantes pour un champ turbulent est le signe de l'existence de structures cohérentes. Townsend (1956) a proposé une définition bimodale de l'écoulement, comme la superposition d'un champ cohérent fortement autocorrélé et d'un champ incohérent. Le champ cohérent suit ainsi une dynamique advective alors que le champ incohérent est plutôt diffusif et suit les lois statistiques de la turbulence homogène isotrope, qui peuvent être modifiées localement par l'existence des structures cohérentes. L'interface entre les structures cohérentes et le champ incohérent, la surcouche visqueuse, est le lieu où le champ incohérent est alimenté en énergie et enstrophie par les structures cohérentes.

La deuxième vision (Chassaing, 2000), qui est apparue plus tardivement, fait appel aux propriétés physiques spatio-temporelles du fluide. Elle consiste à énoncer qu'une structure cohérente est une concentration de vorticité persistante dans un domaine lagrangien. Autrement dit, la cohérence exprime le fait que l'évolution des propriétés géométriques et dynamiques de la structure ont des constantes de temps plus courtes que les processus à l'origine de sa disparition (la diffusion par exemple). Ainsi, en reprenant Lesieur (1990) et Hussain (1986), Chassaing (2000) donne trois critères définissant une structure tourbillonnaire cohérente :

- une masse de fluide dans un domaine particulier (notion de *structure*) ;
- une intensité tourbillonnaire qui permet de dégager la structure de son environnement turbulent (notion de *tourbillon*) ;
- une persistance temporelle dans un suivi lagrangien des caractéristiques du domaine et des propriétés du fluide y évoluant (notion de *cohérence*).

Ces trois caractéristiques essentielles peuvent être étendues aux structures météorologiques.

Les structures cohérentes en mécanique des fluides sont devenues un sujet d'étude important, où on tâche de mieux comprendre leurs caractéristiques, leurs interactions mutuelles et leurs échanges avec le champ incohérent. Un autre centre d'intérêt concerne l'origine de ces structures. Certaines sont liées aux forçages imposés au système (par exemple, les structures cohérentes de paroi), d'autres sont liées aux instabilités de grande échelle présentes dans l'écoulement, enfin certaines émergent spontanément dans des écoulements libres turbulents (McWilliams, 1984).

1.2.4 Les structures cohérentes d'échelle synoptique sont-elles conformes à celles issues de la turbulence ?

On a exposé les caractéristiques des structures cohérentes en mécanique des fluides. On a aussi vu les structures météorologiques d'amplitude finie qu'on souhaite étudier conformément aux structures cohérentes de la mécanique des fluides. Mais le lien reste à faire, c'est-à-dire savoir si les structures d'échelle synoptique peuvent effectivement être considérées comme étant des structures cohérentes.

La plupart des écoulements de l'atmosphère libre sont turbulents, puisque leur nombre de Reynolds varie entre 10^8 et 10^{13} .   méso-échelle, la turbulence est plutôt de nature tridimension-

nelle. À l'échelle synoptique au contraire, le rapport d'aspect très important entre les directions horizontales et verticales questionne le nombre de dimensions de la turbulence.

Charney (1971) s'est intéressé à la turbulence quasi-géostrophique. L'écoulement tridimensionnel est alors stratifié, soumis à une rotation, et restreint par des hypothèses d'échelle (le nombre de Rossby est inférieur à l'unité). Pour chercher les cascades, il faut utiliser des valeurs intégrales du système qui soient conservatives en absence de viscosité. On définit donc l'énergie totale \mathcal{E} , comme étant la somme de l'énergie cinétique et de l'énergie potentielle (due à la stratification). L'ensrophie potentielle \mathcal{F} est la moitié de l'intégrale du carré du tourbillon potentiel. En reprenant les hypothèses de Kraichnan (1967), on peut montrer l'existence des mêmes cascades qu'en turbulence bidimensionnelle, l'énergie totale quasi-géostrophique étant équivalente à l'énergie cinétique bidimensionnelle, et l'ensrophie potentielle étant équivalente à l'ensrophie.

Dans ce cadre, l'injection d'énergie totale et d'ensrophie potentielle se fait au moyen du forçage thermique créé par la différence de rayonnement solaire reçu entre les pôles et l'équateur. La turbulence quasi-géostrophique semblent donc s'approcher davantage de la turbulence bidimensionnelle que tridimensionnelle. En particulier, la cascade d'énergie vers les grandes échelles justifie l'existence de structures cohérentes de tourbillon potentiel.

En mécanique des fluides, on a vu que les structures cohérentes sont liées au terme non linéaire d'advection de la vorticité par elle-même. Il est donc pertinent de déterminer si les structures météorologiques sont issues d'une dynamique plutôt linéaire, faiblement non linéaire, ou intrinsèquement non linéaire.

Il existe une littérature conséquente sur l'interprétation des régimes de blocage et des rapides de jet (Malguzzi et Malanotte-Rizzoli, 1984; Haines et Malanotte-Rizzoli, 1991, par exemple) par des modons et solitons (voir Annexe 1.). Ces structures dipolaires évoluent peu dans un courant-jet zonalement uniforme, grâce à la dynamique non linéaire. Pyle et al. (2004) montrent aussi l'interprétation des rapides de jet par des structures cohérentes au niveau de la tropopause.

En ce qui concerne l'évolution des structures tourbillonnaires d'échelle synoptique, Hakim (2000)   tudie la climatologie des structures cohérentes situées à la tropopause, exprimées en tourbillon relatif. Il compare ces structures à des solutions particulières issues de l'équation barotrope non divergente (adimensionnée) :

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + \beta \frac{\partial \psi}{\partial x} = \delta J(\psi, \zeta), \quad (1.2)$$

où β est la dérivée selon y du paramètre de Coriolis et $\delta = U/(\beta L^2)$ est un paramètre qui mesure l'ordre de grandeur des termes non linéaires d'advection par rapport au terme linéaire de la force de Coriolis. Les solutions de l'équation (1.2) dépendent du paramètre δ . Si $\delta \ll 1$ et qu'on néglige les termes non linéaires, l'équation a pour solutions les ondes de Rossby. Si $\delta \sim o(1)$ et qu'on considère les non-linéarités comme faibles, les solutions prennent la forme de solitons (voir Annexe 1.). Si $\delta \sim O(1)$, alors les termes linéaires et non linéaires ont le même ordre de grandeur, et les solutions sont des modons. Si $\delta \gg 1$, on peut négliger les termes linéaires, il y a une infinité de solutions de la forme $\zeta = F(\psi)$, qui sont des vortex localisés.

L'exploitation d'une longue climatologie (30 ans) de tourbillon relatif sur la surface 500 hPa montre que :

- pour qu'une anomalie soit suffisamment intense et ait des contours fermés, il faut que $\delta > 5$, ce qui exclut les ondes de Rossby et les solitons ;
- les vitesses de phase des anomalies dépendent de leur amplitude, ce qui confirme l'importance des non-linéarités ;
- les anomalies ont une vitesse de phase légèrement inférieure au jet de l'environnement, ce qui élimine les modons.

La conclusion est que l'interprétation des structures d'altitude, en moyenne, peut faire uniquement par des structures tourbillonnaires fortement non linéaires, donc comme de véritables structures cohérentes.

La formation et la dynamique de ces structures est cependant complexe. Dans une étude idéalisée sur un courant-jet barotrope, Hodyss et Nathan (2004) montrent l'importance du champ de déformation du courant-jet et des non-linéarités pour la formation d'une structure cohérente. L'étude de la dynamique de ces structures ne pourra pas se passer de la compréhension de leurs interactions mutuelles et de l'action de leur environnement.

Les structures cohérentes de tourbillon potentiel méritent aussi d'être caractérisées. Contrairement aux noyaux de tourbillon relatif, elles évoluent souvent dans un environnement de grande échelle imposé par le vortex polaire. La Fig. 1.8 permet de voir l'évolution temporelle de ce vortex polaire sur la surface isentrope 330 K. On remarque qu'il est caractérisé par une zone de fort gradient à sa frontière (McIntyre et Palmer, 1984), indiqué sur la figure par la ligne 2 pvu. Ce gradient de tourbillon potentiel est associé au courant-jet (Palmén et Newton, 1948), et joue le rôle d'un guide d'onde de Rossby (Hoskins et al., 1985; Schwierz et al., 2004). Les ondes de Rossby de grande échelle semblent effectivement suivre un régime ondulatoire. En revanche, si on s'intéresse aux petites échelles, on observe des noyaux bien isolés qui évoluent le long du guide d'onde ou qui le quittent. Les paquets d'onde qui évoluent dans un régime fortement non linéaire peuvent prendre la forme de structures cohérentes qui se dispersent peu, de façon similaire à un soliton (voir Annexe 1.). À des niveaux isentropes inférieurs, les structures intenses se prolongent en se séparant du vortex polaire (voir les figures de Hoskins et al., 1985, p. 887) qui lui, se rapproche du pôle à mesure que le niveau isentrope est de température potentielle faible.

L'évolution non linéaire des paquets d'onde de Rossby dans le guide d'onde déforme la ligne de gradient. Le déferlement des paquets d'onde (McIntyre et Palmer, 1984) peut donner lieu à divers types de structures. Thorncroft et al. (1993) ont identifié deux types de déferlement : le LC1 et LC2, qu'on peut observer sur la plupart des cas de déferlement. Le LC1 transforme la crête du paquet d'onde en un filament serré, et le LC2 donne lieu à une structure cohérente plutôt isotrope. Les structures ainsi créées sont capables d'interagir avec les basses couches, ce qui peut favoriser des cyclogenèses de type B, ou des épisodes de pluie intense s'il y a du relief. La Fig. 1.9 illustre la dynamique d'altitude à l'échelle synoptique sur le cas de Noël 1999. Le 26 décembre à 06 TU, un long filament se place au large des côtes Américaines. Celui-ci se contracte ensuite et il apparaît à une structure isotrope située au large de l'Irlande le 27 à 06 TU. Le lien direct entre la contraction du filament et la formation de la structure n'est pas démontré. Cependant, les interactions à l'origine de la déformation et l'amplification des structures, sont essentielles pour la dynamique des structures cohérentes d'altitude.

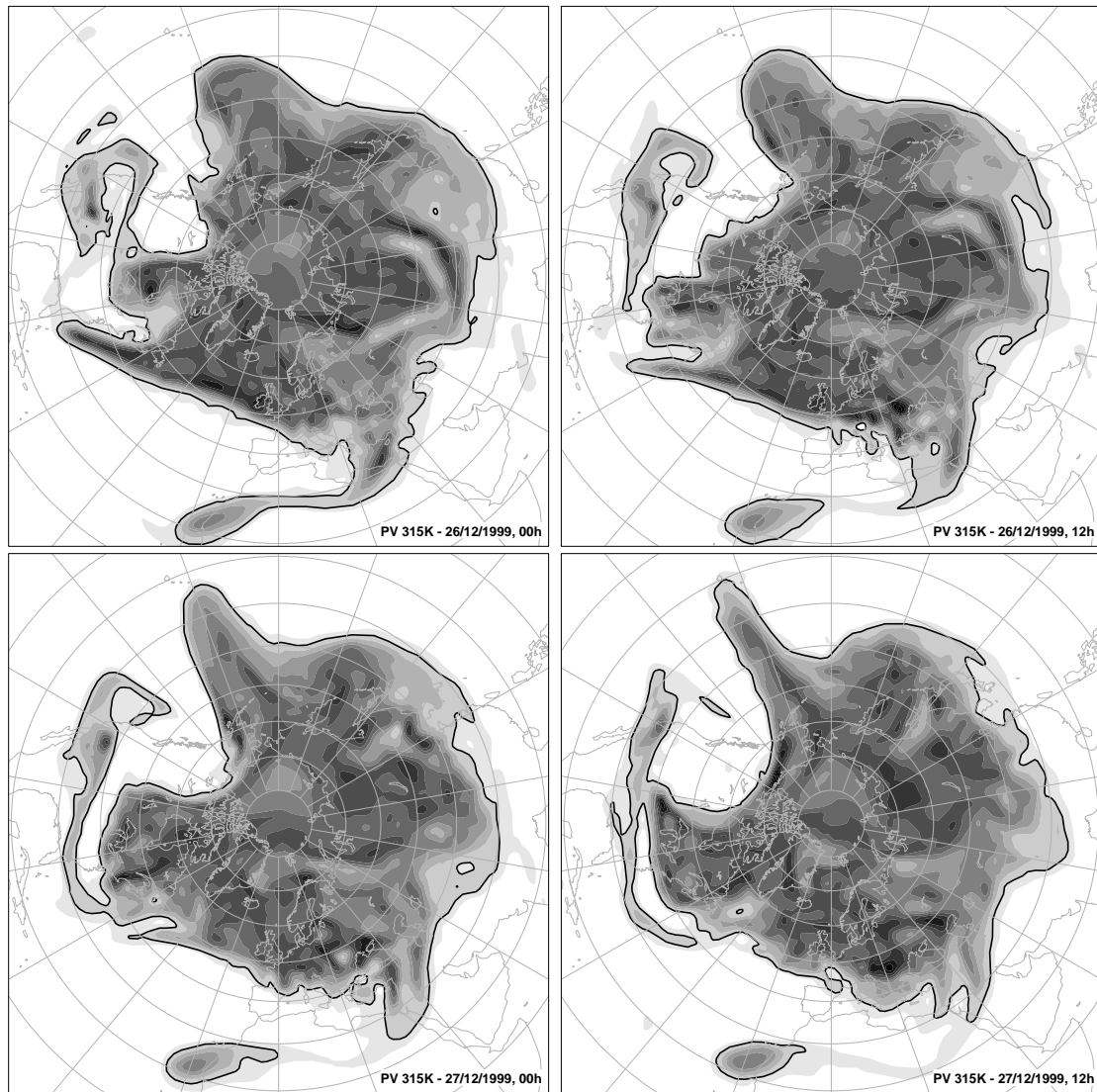


FIG. 1.8: Évolution du tourbillon potentiel sur la surface isentrope 330 K les 26 et 27 décembre 1999 (pas 12 h). L'isoline 2 pvu est représentée par un trait noir. Les plages de gris sont séparées par l'intervalle 1 pvu. Source : ERA40.

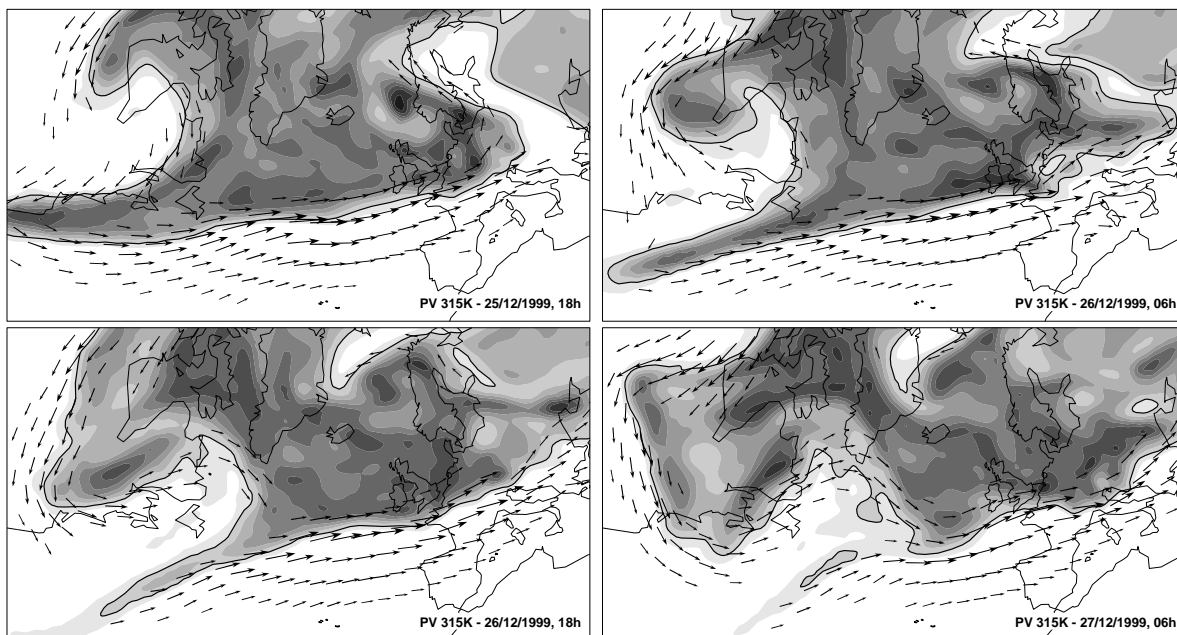


FIG. 1.9: Tourbillon potentiel (même légende que la Fig. 1.8) et vent (flèches à partir de 30 m.s^{-1} , dont la longueur est proportionnelle au module) sur le niveau 315 K, du 25 décembre 1999 à 18 TU au 27 à 06 TU (pas 12 h). Source : ERA40.

1.3 Un tour d'horizon des méthodes d'extraction des structures cohérentes

L'objectif de cette partie est de présenter brièvement les concepts et les techniques de détection des structures cohérentes.

1.3.1 Forme et traitement d'image

Les structures cohérentes ramènent à la notion de forme : il s'agit de motifs caractéristiques de l'écoulement turbulent qui sont définis par une masse connexe de fluide. L'approche exclusivement « newtonienne » des sciences en général, et de la mécanique des fluides en particulier ne favorise pas la description mathématique des formes (Petitot, 1996). Autrement dit, l'examen du système d'équations qui régit l'écoulement, à savoir les équations de Navier-Stokes ou les équations primitives en météorologie, ne permet pas de déterminer l'existence et les caractéristiques des structures cohérentes. Il faut, pour observer ces structures, soit s'intéresser à un écoulement réel régi par ces équations, soit faire appel à la simulation numérique. Les notions de structure et de forme sont avant tout des concepts visuels. Pour analyser les structures cohérentes, il est donc nécessaire de considérer les résultats des observations ou des simulations numériques, et d'y appliquer un post-traitement des séquences d'images.

La traitement de l'image (Cocquerez et Philipp, 1997) consiste à faire exécuter par une ma-

chine ce que tout couple œil-cerveau humain (et la plupart des vertébrés aussi) est capable de faire : analyser les différents éléments de l'image que sont ces formes, ces régions, ces contours, de façon à pouvoir en tirer toute l'information qu'elle porte, c'est-à-dire la comprendre. Le traitement de *bas niveau* cherche à passer d'une représentation de l'image en pixels (ou points de grille) à une représentation adaptée à l'analyse. Il s'agit donc de filtrage, de détection de contours ou de séparation de l'espace en régions disjointes. Le traitement de *haut niveau* vise à déduire de la représentation numérique adaptée de l'image l'ensemble de ses caractéristiques symboliques. La reconnaissance de forme est un traitement de haut niveau. L'extraction de structures cohérentes est un traitement de bas niveau : il s'agit de représenter l'image par un ensemble de structures disjointes. Un traitement de haut niveau associé à une telle extraction pourrait être le classement et l'étiquetage des structures en fonction de leur caractéristiques : position, rapport d'aspect, angle par rapport à un axe.

Le traitement de l'image est un problème scientifique et technique en pleine expansion, qui s'applique dans de nombreux domaines. D'un point de vue scientifique, l'émergence de formes est possible dans tous les systèmes thermodynamiques hors d'équilibre. On a déjà vu que c'est le cas en turbulence, mais aussi en cosmologie (formation des galaxies et des systèmes stellaires), en biologie (apparition de la vie, forme des êtres vivants) et dans un grand nombre de réactions chimiques. Pour qu'une telle auto-organisation apparaisse, il faut un système à deux niveaux de réalité (Petitot, 1996) : les structures ordonnées émergent du chaos, fortement désordonné. La compréhension de l'émergence, ainsi que l'organisation et la dynamique des structures ordonnées font l'objet de recherches actuellement. Celles-ci nécessitent des techniques adaptées, comme par exemple le traitement de l'image.

D'un point de vue technique, l'analyse automatique des images est développée pour détecter et analyser des phénomènes de nature différente. On peut citer par exemple la sécurité et la vidéo-surveillance (reconnaissance de visages, de signature, détection de mouvement), la médecine (détection de tumeurs ou d'autres anomalies), ainsi que tout domaine où la classification d'objets est utile.

En météorologie synoptique, les méthodes d'extraction de structures rencontrent aussi un certain succès.

1.3.2 Les techniques utilisées en météorologie

On omettra ici les techniques d'analyse de l'imagerie satellitaire, pour se concentrer sur l'extraction de structures dans des champs météorologiques. Souvent, les techniques d'extraction de structures météorologiques ne font pas seulement appel à du traitement d'image, mais aussi à un suivi temporel des structures.

Les premières techniques ont été appliquées au champ de tourbillon relatif, car ces noyaux de tourbillon en basses couches sont souvent bien identifiables. Hodges (1994) propose une méthode de segmentation de l'image. La détection des noyaux de vorticité se fait par détermination de régions connexes où les valeurs du champ sont supérieures à un seuil. Puis, un suivi temporel automatique entre les structures extraites sur une période d'étude permet de calculer les trajectoires des vortex. Appliquée à la sphère (Hodges, 1995) avec des contraintes améliorées sur l'extraction et sur le suivi automatique (Hodges, 1999), cette technique permet d'effectuer des cartes de

densité de tempêtes à partir de champs globaux. Récemment, Froude et al. (2007) l'ont utilisée pour valider les sorties de modèles météorologiques.

La technique d'Ayrault (1995, 1998) montre qu'il est suffisant pour obtenir des cartes de densité d'utiliser un suivi automatique sur les maxima de vorticité, sans avoir à décrire intégralement les noyaux. Le suivi automatique des noyaux de tourbillon relatif fonctionne correctement en basses couches. Cependant, dès lors que les structures cohérentes sont mélangées à un environnement non uniforme, ce type de méthode fonctionne moins bien. C'est le cas par exemple du tourbillon relatif en altitude au voisinage du courant-jet (A. Joly – communication personnelle), et du tourbillon potentiel (voir plus haut).

L'approche par détection de contours a été envisagée pour repérer les dépressions au niveau de la mer (Wernli et Schwierz, 2006).   partir des minima relatifs du champ de pression réduite au niveau de la mer, on cherche le contour isobare fermé le plus éloigné du minimum. Le but est encore ici d'effectuer des analyses climatologiques de ces structures. Dans le même objectif et en ce qui concerne les structures à la tropopause, Wernli et Sprengler (2007) utilisent aussi un algorithme de détection de contour pour rechercher les structures filamenteuses (*streamer*) et fermées (*cut-off*) en tourbillon potentiel. Leur approche n'est pas rigoureusement objective, puisque des paramètres *ad hoc* sont requis pour la définition des filaments.

1.4 Objectifs de l'extraction

1.4.1 Quelle extraction ?

Les approches d'extraction de structures cohérentes sont nombreuses et diverses. Il est donc nécessaire de bien situer les objectifs que l'on souhaite atteindre afin de choisir la méthode la plus adaptée. L'objectif principal découle de la problématique de la cyclogénèse présentée précédemment : il s'agit de progresser dans la connaissance des mécanismes de cyclogénèse en donnant une définition mathématique aux structures cohérentes d'échelle synoptique. Basée sur l'instabilité barocline, la théorie classique de la cyclogénèse est formellement élégante. Cependant, il est extrêmement difficile de la valider car la transposition des cas réels observés à un cadre idéalisé est impossible. La définition des anomalies et de leur environnement est arbitraire sur des cas réels. En conséquence, une forte contrainte imposée à un renouvellement théorique est de permettre que le même cadre mathématique et numérique puisse traiter les champs idéalisés et des champs réels, ce qui autoriserait de vérifier les éléments théoriques.

Ainsi, cet objectif théorique majeur se décline en trois problèmes secondaires.

Premièrement, il s'agit de mettre en œuvre des outils mathématiques adaptés. De même que les modes normaux peuvent être représentés par les fonctions harmoniques, il s'agira de représenter les structures par une base de fonctions adaptées. L'extension limitée des structures cohérentes dans l'espace physique et dans l'espace spectral rend naturel le choix des bases d'ondelettes.

Deuxièmement, les structures cohérentes auxquelles on s'intéresse portent aussi le nom de perturbation et d'anomalie, par analogie avec les théories d'instabilité. Si on veut décrire les anomalies d'échelle synoptique, il est essentiel de définir aussi leur environnement de façon sa-

tisfaisante. Les méthodes classiques mettent en jeu la séparation en échelle temporelle (filtrage temporel) ou en échelle spatiale (filtrage spatial). On considère ainsi que les anomalies de petite échelle évoluent sur un environnement de grande échelle non stationnaire, mais qui change lentement dans le temps. L'hypothèse, souvent implicite, est que l'environnement joue le rôle d'une « toile de fond » stationnaire et de grande échelle dont les propriétés conditionnent l'évolution des anomalies. Ainsi, l'environnement agirait sur les anomalies, mais que les anomalies modifieraient leur environnement de façon mineure. Cependant, il s'agit seulement d'une approximation : les interactions météorologiques se font dans les deux sens entre grandes et petites échelles, spatiales et temporelles (Malardel, 2005). La séparation en échelle est donc peu satisfaisante d'un point de vue théorique. Ainsi, la méthode d'extraction recherchée doit s'abstenir de faire appel à un filtrage temporel ou spatial *a priori*.

Le dernier problème auquel l'extraction devra répondre est d'être capable de manipuler les structures de façon satisfaisante en entrée et en sortie d'un modèle numérique. Il sera alors possible d'utiliser la représentation pour mener des études dynamiques des structures et de bâtir de nouveaux outils de prévisibilité.

Comme nous le verront par la suite, l'approche en ondelettes doit permettre de remplir ces trois objectifs.

1.4.2 Structures cohérentes et prévisibilité

La prévision météorologique par les modèles numériques n'est pas parfaite. Alors que les capacités de calcul et la collection de mesures ont augmenté de façon fulgurante depuis plus de 50 ans, il est toujours impossible de prévoir l'état précis de l'atmosphère, même à courte échéance.

Cette limitation de la prévision numérique tient au caractère chaotique de l'atmosphère, propriété déjà vue précédemment. Le premier système chaotique à faible nombre de degrés de liberté a été découvert par Lorenz (1963) à partir de l'étude d'un modèle atmosphérique simplifié. On parle de chaos déterministe : bien que les équations du système soient définies exactement, son comportement est chaotique. Ces travaux ont lancé un nouveau champ scientifique qui depuis n'a pas fini de se développer : la théorie des systèmes dynamiques, dont les propriétés de base sont présentées par Bergé et al. (1988). L'irrégularité de l'atmosphère (Lorenz, 1984) équivaut à sa non-périodicité. Si on reprend l'analogie donnée par Lorenz (1965), on peut prévoir les marées plusieurs années à l'avance car il s'agit d'un phénomène périodique, au contraire de l'état météorologique, qui suit une dynamique non périodique, chaotique. Un système dissipatif entretenu, autrement dit hors d'équilibre, peut être non périodique. Dans ce type de système, tout état initial converge rapidement vers l'attracteur du système (Bergé et al., 1988) et poursuit son évolution sur cet attracteur.

L'attracteur d'un système chaotique peut prendre des formes très complexes, parfois fractales, on l'appelle alors attracteur étrange. Deux états proches sur un tel attracteur peuvent emprunter des trajectoires très différentes (Lorenz, 1963) : la distance entre les deux états peut croître de façon exponentielle avec le temps, voire plus rapidement (Farrell et Ioannou, 1996b). Dans un système chaotique, il y a donc une forte sensibilité aux conditions initiales.

Si on revient à la modélisation numérique de l'atmosphère, les erreurs de prévision ont deux causes :

- la sensibilité aux conditions initiales des équations : la connaissance exacte de l'état initial de l'atmosphère étant illusoire, l'erreur sur les conditions initiales n'est pas nulle. Cette erreur initiale croîtra au cours du temps ;
- la modélisation des phénomènes est imparfaite : les discrétisations spatiales et temporelles et les paramétrisations des phénomènes sous-maille, entre autres choses, introduisent des erreurs par rapport à l'évolution réelle du fluide.

Ce qu'on nomme *prévisibilité* est la capacité de prévoir l'état de l'atmosphère. La prévisibilité d'un phénomène dépend de l'état initial : certaines régions de l'attracteur seront davantage associées à des situations faiblement prévisibles que d'autres.

Les premières études de prévisibilité ont consisté à déterminer la croissance d'erreur dans des modèles chaotiques à faible nombre de degrés de liberté (28 dans le modèle de Lorenz, 1965). En supposant que l'erreur initiale est faible, on peut effectuer une analyse linéaire de la croissance d'erreur. Lorenz (1965) propose ainsi de calculer les taux d'amplification linéaire d'erreur sur un intervalle de temps ; il découvre ainsi l'utilité des valeurs singulières. Molteni et Palmer (1993) calculent les vecteurs singuliers les plus instables associés à des régimes de circulation hivernale sur l'Atlantique Nord. Ils montrent que les taux de croissance d'erreur typique se rapprochent davantage des modes singuliers que des modes normaux. La croissance d'erreur dans ce modèle atmosphérique de grande échelle serait principalement liée aux instabilités baroclines. Ces résultats justifient l'utilisation des vecteurs singuliers pour la prévision d'ensemble du CEPMMT² (Mureau et al., 1993; Molteni et al., 1996). Ainsi, l'explication classique de la croissance d'erreur repose sur l'instabilité de l'atmosphère.

Il découle de cette approche une limite théorique pour la prévision météorologique. Pour une croissance d'erreur exponentielle sur un état de base stationnaire, le taux étant donné par les instabilités de grande échelle, Lorenz (1984) déduit une limite théorique de la prévision du temps à grande échelle qui serait comprise entre 15 et 30 jours. Il est important de noter que cette limite est valide pour la circulation générale et un système de prévision des régimes de temps. À plus petite échelle, elle serait plus courte, et à l'échelle climatique il est encore possible de prévoir l'évolution de certains comportements de l'atmosphère. La limite de prévisibilité signifie que deux états initiaux proches qui évolueraient jusqu'à cette échéance deviendraient aussi indiscernables que deux états tirés au hasard. L'oubli des conditions initiales serait alors total.

Cette idée de limite théorique à la prévisibilité est toujours controversée. Elle repose sur deux hypothèses qu'on peut remettre en cause. La première est la linéarité supposée de la croissance d'erreur. La seconde est liée au fait que les modèles utilisés par Lorenz (1963, 1965) comportent un très faible nombre de degrés de liberté, par rapport aux modèles météorologiques. On peut ainsi s'interroger sur la généralisation des résultats mis en évidence dans système à quelques degrés de liberté à un système en comportant plus de 10^6 .

À mesure que l'amplitude de l'erreur augmente, l'hypothèse linéaire perd sa validité. De plus, certains phénomènes, dont l'évolution est soumise au dépassement d'un seuil, ne peuvent être linéarisés. De plus, l'expérience des prévisionnistes du temps montre que l'erreur de prévision

²Centre Européen pour les Prévisions Météorologiques à Moyen Terme, situé à Reading (Royaume-Uni)

s'identifie souvent à une erreur sur la position, l'amplitude ou la vitesse d'une structure, par exemple d'une tempête ou d'un système convectif de méso-échelle. Des études récentes se sont ainsi intéressées à la croissance non linéaire de l'erreur en présence de structures cohérentes. Ce type d'erreur de phase lors de la propagation des structures cohérentes a été montré par Snyder (1999) sur des cas idéalisés. La croissance de l'erreur n'est pas associée à des instabilités, mais plutôt aux interactions croisées entre les structures qui modifient les propriétés de l'environnement où elles évoluent.

Une contribution de Robert et Rosier (2001) remet en cause le paradigme de Lorenz en montrant que les résultats dans un modèle à faible nombre de degrés de libertés ne sont pas généralisables à de grands systèmes comme l'atmosphère. En présence de structures cohérentes dans un modèle barotrope 2D, certaines erreurs initiales peuvent ainsi être annulées par la dynamique non linéaire de la structure. Le modèle utilisé par Robert et Rosier (2001) est certes beaucoup plus simple que le système atmosphérique, mais leur étude montre que les structures cohérentes sont susceptibles d'avoir un impact important sur la croissance d'erreur. La dynamique de ces structures peut comporter des phénomènes à seuil susceptibles de donner lieu à des scénarios multimodaux, plutôt qu'une croissance continue de l'erreur. Il convient toutefois de rappeler que la sensibilité aux conditions initiales de la prévision d'un système de type tempête dans un modèle à très grand nombre de degrés de liberté est une réalité vécue par la prévision météorologique opérationnelle. On en rencontre des exemples plus loin.

L'existence des structures cohérentes remettrait donc en cause le paradigme actuel de la croissance d'erreur par instabilité dans les systèmes géophysiques. Sans aller forcément très loin dans cette remise en cause, on peut espérer déduire des méthodes d'extraction des structures cohérentes de nouveaux outils pour gérer la prévisibilité dans les modèles atmosphériques, pour la prévision d'ensemble et l'assimilation de données.

Chapitre 2

Extraction des structures cohérentes par la transformée en ondelettes

2.1 Extraction du champ cohérent

2.1.1 La transformée en ondelettes

L'objectif de cette partie bibliographique est de présenter les différents types de transformées en ondelettes et leurs propriétés afin de montrer ce qu'elles apportent à la représentation d'un champ composé de structures cohérentes. Pour une présentation plus complète des outils et des théorèmes sous-jacents, on pourra lire l'ouvrage de référence de Mallat (1998, 2000) et l'article de Farge (1992).

Représentation d'un signal

Il existe différentes manières de représenter une même fonction d'une variable réelle. Chaque représentation permet de révéler des caractéristiques propres au signal, ce qui facilite son analyse et sa description. Pour une fonction continue quelconque, une méthode de représentation simple consiste à définir une grille, et à donner sa valeur en chacun des points de grille, ce qu'on appelle la *représentation en points de grille*. Pour une fonction de carré intégrable, on peut utiliser la *représentation spectrale*, obtenue à l'aide de la transformée de Fourier, qui consiste à décomposer la fonction en la somme d'exponentielles complexes (ou de façon équivalente de fonctions sinusoïdales).

Selon le traitement qu'on souhaite appliquer au signal, une représentation peut être plus adaptée qu'une autre. Pour agir en un point précis d'un signal dans l'espace physique, la représentation en points de grille est la plus appropriée. En revanche, la représentation spectrale est la plus utile pour un filtrage fréquentiel. Le formalisme des ondelettes permet de construire un type de représentation qui concilie l'approche en points de grille et l'approche spectrale, ce qui permet d'avoir une représentation localisée à la fois dans l'espace physique et dans l'espace spectral.

La transformée en ondelettes continues

On s'intéresse à des fonctions à valeur dans l'espace des réels et de carré intégrables. Dans un tel espace de fonctions, un produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est défini par :

$$\langle g, h \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x)h(x)dx \quad \forall g, h \in \mathbf{L}^2(\mathbb{R}) .$$

Une transformée en ondelettes repose sur la définition d'une fonction initiale ψ , appelée *ondelette-mère*. Par définition, elle doit être de carré intégrable et de moyenne nulle (condition d'admissibilité). La notion de compacité n'est pas nécessaire à sa définition. Cependant, la transformée en ondelettes est intéressante pour une ondelette-mère qui a conjointement une bonne localisation dans l'espace physique et dans l'espace spectral. Les translations de paramètre u et les dilatations de paramètre s de l'ondelette-mère définissent la famille d'ondelettes continues

$$\psi_{s,u}(x) = \frac{1}{\sqrt{s}} \psi\left(\frac{x-u}{s}\right), \quad s \in \mathbb{R}^*, u \in \mathbb{R} . \quad (2.1)$$

Pour analyser la localisation d'une ondelette dans l'espace physique et dans l'espace spectral, on peut représenter son « atome » dans le plan position-fréquence (Fig. 2.1).

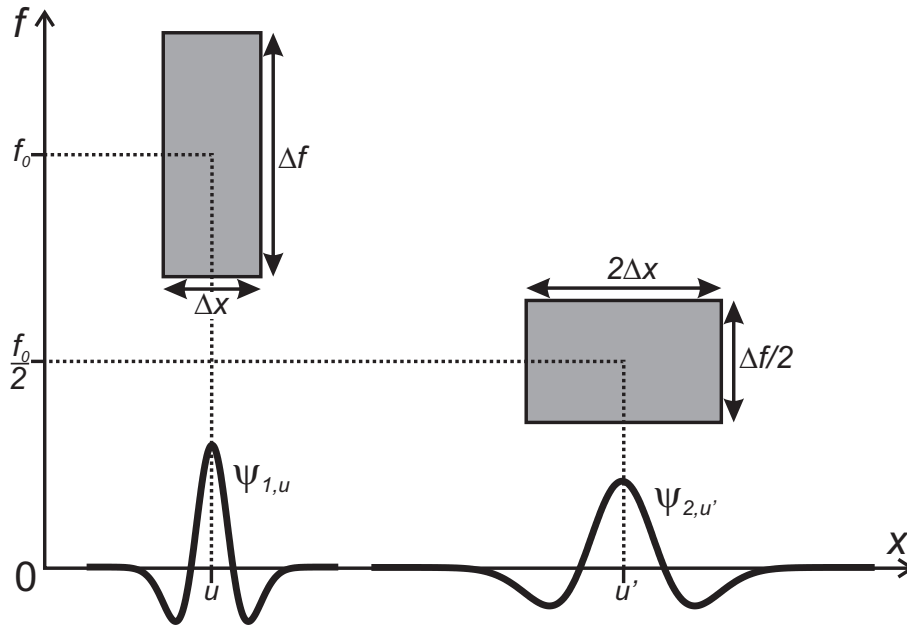


FIG. 2.1: « Atomes » (rectangles grisés) dans le plan position-fréquence de deux ondelettes dilatées d'un facteur 2. Les écarts-type de chaque ondelette dans l'espace physique Δx et dans l'espace spectral Δf y définissent un rectangle, dont l'aire est conservée par les dilatations de l'ondelette. La redondance entre deux ondelettes est caractérisée par l'intersection entre leurs atomes. Figure d'après Mallat (1998).

L'écart-type de chaque ondelette dans l'espace physique Δx et dans l'espace spectral Δf sont

contraints par le principe d'incertitude :

$$\Delta x \Delta f \geq 1/2 ,$$

qui signifie que l'information décrite par une fonction ne peut pas être précise autant que l'on veut à la fois dans l'espace physique et dans l'espace spectral. Dans le plan position-fréquence (Fig. 2.1), le principe d'incertitude implique que l'aire minimale d'un atome est $1/2$. Cette valeur minimale est atteinte par exemple pour une fonction Gaussienne.

La transformée en ondelettes (WT, pour *wavelet transform*) d'une fonction réelle g est un ensemble de produits scalaires de g avec des translatés et dilatés de l'ondelette-mère. La transformée en ondelettes continues est l'ensemble des coefficients d'ondelettes :

$$Wg(s, u) = \langle \psi_{s,u}, g \rangle \quad \forall s \in \mathbb{R}^*, u \in \mathbb{R} . \quad (2.2)$$

Un coefficient $Wg(s, u)$ peut ainsi s'interpréter comme l'amplitude algébrique dans le signal g des variations de taille caractéristique s localement autour du point u . La transformée continue est couramment utilisée pour l'analyse de signaux. Elle permet de caractériser les échelles locales d'un signal.

La transformée en ondelettes orthogonales

On cherche maintenant à représenter une fonction g par un ensemble de coefficients (\tilde{g}_i) obtenus par projection de g sur une base orthogonale $\{b_i, i = 1, \dots, \infty\}$:

$$g = \sum_{i=1}^{\infty} \langle b_i, g \rangle b_i = \sum_{i=1}^{\infty} \tilde{g}_i b_i .$$

La représentation en points de grille permet une telle écriture discrète ; de même pour la représentation spectrale si la fonction g est périodique. Dans le premier cas les fonctions de base sont des fonctions de Dirac, et dans le second, ce sont des exponentielles complexes.

La transformée en ondelettes continues est fortement redondante ; elle n'est pas une méthode de représentation orthogonale. Si on veut construire une base d'ondelettes orthogonales, il est nécessaire de diminuer le nombre de coefficients, et donc de discrétiser les dilatations et les translations. La discrétisation des dilatations peut se faire par la transformée dyadique, qui consiste à utiliser des facteurs de dilatation qui sont des puissances de 2. Il est possible de construire une ondelette-mère ψ , telle que la famille d'ondelettes

$$\psi_{j,n}(x) = \frac{1}{\sqrt{2^j}} \psi \left(\frac{x - n2^j}{2^j} \right) , \quad j \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{Z} \quad (2.3)$$

est une base d'ondelettes orthogonales. Comme à chaque entier j est associée une échelle spatiale, on appelle par abus de langage j l'échelle de l'ondelette $\psi_{j,n}$. Par application des produits scalaires (Eq. 2.2), on définit ainsi une transformée en ondelettes orthogonales (OWT). Les conditions pour construire une ondelette-mère qui forme une base d'ondelettes orthogonales sont

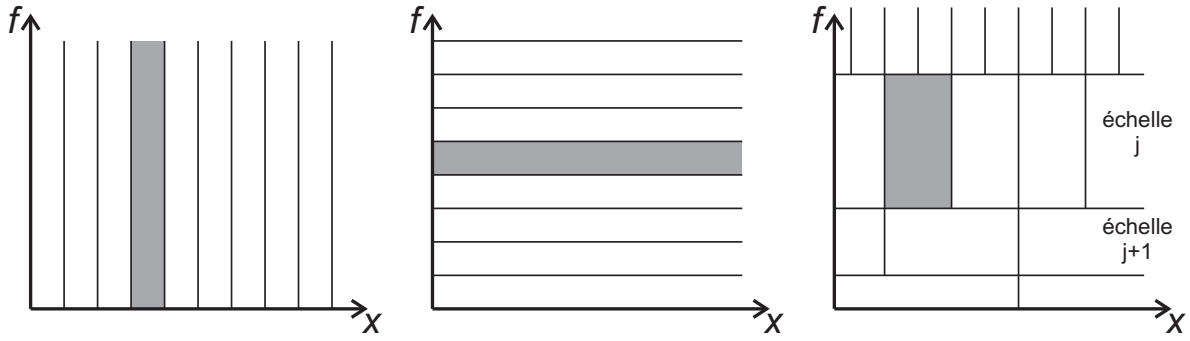


FIG. 2.2: Plan position-fréquence (x, f) des fonctions élémentaires de la représentation point de grille (fonctions de Dirac, à gauche), spectrale (exponentielles complexes, au milieu) et par une base d'ondelettes orthogonales (OWT, à droite). Une fonction élémentaire de chaque base apparaît en grisé. La non-redondance entre les éléments de chaque base s'observe par le caractère disjoint des « atomes » dans le plan. Figure inspirée de Farge (1992).

très restrictives. L'analyse multirésolution, qui permet de construire une telle base, est développée dans la section suivante.

Le plan position-fréquence (Fig. 2.2) des représentations en points de grille, spectrale, et en ondelettes orthogonales aide à appréhender leurs différences. Pour la représentation en points de grille, une fonction de Dirac donne accès à la connaissance locale du signal, l'incertitude de son spectre est totale. La situation est opposée pour la représentation spectrale. En revanche, une ondelette orthogonale informe à la fois sur la localisation dans l'espace physique et spectral. La base associée forme un pavage régulier du plan position-fréquence.

L'échelle j d'une ondelette peut s'interpréter en termes de fréquence et de taille caractéristique de l'ondelette. D'après la Fig. 2.2, l'échelle d'une ondelette est associée à une gamme de fréquences. Comme le passage d'une échelle à la suivante se traduit par une dilatation de l'ondelette par un facteur 2 (voir l'Eq. 2.3), le spectre de Fourier de la fonction associée est translaté vers les basses fréquences et sa largeur est divisée par 2 (voir aussi la Fig. 2.1). L'échelle la plus grande est donc liée à la basse fréquence. En ce qui concerne la taille des ondelettes, si l'ondelette-mère a une longueur caractéristique de $c\delta x$ (δx est la résolution de la grille), une ondelette d'échelle j a pour taille caractéristique $2^j c\delta x$. Le facteur c dépend du support de l'ondelette-mère.

Une propriété importante d'une ondelette est son nombre de moments nuls. L'ondelette ψ a p moments nuls si et seulement si p est l'entier maximal tel que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} t^k \psi(t) dt = 0 \quad \forall k, 0 \leq k < p.$$

Si une ondelette a p moments nuls, cela signifie que les composantes polynomiales de degré inférieur à p produisent des coefficients d'ondelettes nuls. Ainsi, si l'ondelette a suffisamment de moments nuls, les coefficients d'ondelettes aux petites échelles d'un signal lisse seront faibles. De plus, cette définition est équivalente au fait que la transformée de Fourier de ψ a ses $p - 1$ premières dérivées nulles en $f = 0$.

Plus il y a de moments nuls, meilleure est la sélectivité fréquentielle de l'ondelette-mère. En contrepartie, la taille du support de l'ondelette croît avec le nombre de moments nuls. En effet, un théorème de Daubechies (1988) énonce qu'une ondelette à support compact ayant p moments nuls a un support de taille au moins $2p - 1$. De ce fait, une ondelette bien localisée par un support de petite taille a nécessairement un petit nombre de moments nuls.

Analyse multirésolution

La construction d'une base d'ondelettes orthogonales peut se faire dans le cadre de l'analyse multirésolution. Pour décomposer des fonctions qui n'ont pas une moyenne nulle, ou pour arrêter la décomposition à une échelle finie maximale J , il faut faire appel à une nouvelle fonction, liée à l'ondelette-mère, et qu'on appelle la *fonction d'échelle* ϕ . Contrairement à l'ondelette-mère qui est de moyenne nulle, la fonction d'échelle est de moyenne unitaire. On définit les translatés et dilatés de la fonction d'échelle par

$$\phi_{J,n}(x) = \frac{1}{\sqrt{2^J}} \phi\left(\frac{x - n2^J}{2^J}\right).$$

Cette fonction est telle que

$$\langle \phi_{J,n}, \psi_{j,n'} \rangle = 0 \quad \text{et} \quad \langle \phi_{J,n}, \phi_{J,n'} \rangle = \delta_{n,n'} \quad \forall n, n', j < J,$$

ce qui révèle des propriétés d'orthogonalité.

On peut ainsi décomposer une fonction g de la façon suivante :

$$g(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \langle \phi_{J,n}, g \rangle \phi_{J,n}(x) + \sum_{j=-\infty}^J \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \langle \psi_{j,n}, g \rangle \psi_{j,n}(x), \quad (2.4)$$

ce qui revient à écrire la fonction comme la somme de son approximation de grande échelle J et de ses détails d'échelle $j < J$. Cette décomposition échelle par échelle mène au principe de l'analyse multirésolution, qui consiste à construire les sous-espaces

$$\begin{aligned} V_j &= \text{Vect} \{ \phi_{j,n}, n \in \mathbb{Z} \} \\ W_j &= \text{Vect} \{ \psi_{j,n}, n \in \mathbb{Z} \} \end{aligned} \quad \forall j \in \mathbb{Z}. \quad (2.5)$$

Ces espaces doivent avoir des propriétés particulières, développées par Mallat (1998).

Si on dispose d'un ensemble de sous-espaces multirésolution V_j , on peut montrer qu'ils peuvent être construits grâce à un filtre discret F_ϕ , appelé *filtre miroir conjugué*, et défini par la relation

$$\hat{\phi}(k) = \hat{\phi}\left(\frac{k}{2}\right) \hat{F}_\phi\left(\frac{k}{2}\right),$$

où $\hat{\cdot}$ désigne l'opérateur de la transformée de Fourier et k le nombre d'onde. Le filtre est 2π -périodique. En quadrature avec F_ϕ , il existe un autre filtre discret F_ψ , de telle sorte que F_ϕ soit

un filtre passe-bas et F_ψ soit un filtre passe-bande. La transformée en ondelettes peut ainsi être calculée par application successive de ces filtres échelle par échelle :

$$\begin{aligned} a_{j+1}[n] &= \langle \phi_{j+1,n}, g \rangle = \sum_{p=-\infty}^{+\infty} F_\phi[p-2n]a_j[p] \\ d_{j+1}[n] &= \langle \psi_{j+1,n}, g \rangle = \sum_{p=-\infty}^{+\infty} F_\psi[p-2n]a_j[p] . \end{aligned} \quad (2.6)$$

Cet algorithme de décomposition est la transformée rapide en ondelettes, dont le coût de calcul est en $O(N)$. En entrée de l'algorithme, on donne le signal initial, échantillonné sur une grille de $N = 2^J$ points, où J est l'échelle maximale de décomposition. Ainsi, la transformée en ondelettes consiste en une succession de filtrages $1, \dots, J$ où la composante haute-fréquence forme les coefficients d'ondelettes (détails) d'échelle j et la composante basse-fréquence donne l'approximation du signal qui sera analysée à l'étape suivante $j+1$ (Fig. 2.3). À la fin du processus, on obtient les coefficients d'ondelettes aux échelles $1, \dots, J$ et l'approximation à l'échelle J .

La transformée en ondelettes rapide est l'algorithme qui sera utilisé dans les présents travaux. Il existe une transformée inverse rapide qui permet de reconstruire un signal à partir de ses coefficients d'ondelettes.

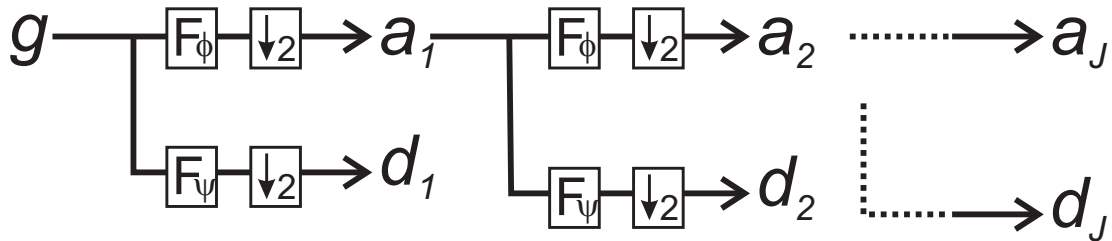


FIG. 2.3: Illustration de la transformée rapide en ondelettes (figure inspiré de Mallat, 1998). Le signal initial g est convolué avec le filtre passe-bas F_ϕ et le filtre passe-bande F_ψ , puis une décimation de la moitié des coefficients est appliquée. Ces opérations donnent les coefficients d'ondelettes d_1 d'échelle 1 et une approximation a_1 de la même échelle. Le filtrage suivant consiste à appliquer ce nouveau filtrage sur l'approximation, et ainsi de suite jusqu'à l'échelle maximale voulue J .

Les calculs présentés jusqu'ici sont appliqués à des fonctions définies sur l'espace des réels. Il existe plusieurs moyens de définir une transformée en ondelettes orthogonales sur un intervalle. La première technique consiste à appliquer les équations de filtrage (Eq. 2.6) de façon circulaire sur l'intervalle, ce qui revient à considérer la fonction g comme étant périodique. Près des bords, cette technique pose problème si la fonction et ses dérivées ne sont pas périodiques, car alors des coefficients d'ondelettes de valeur importante y apparaissent artificiellement. Cependant elle est peu coûteuse et simple à mettre en œuvre ; c'est pourquoi cette solution sera choisie pour les présents travaux, en prenant des précautions près des bords. D'autres méthodes de transformées en ondelettes sur l'intervalle sont possibles, comme par exemple les ondelettes repliées, qui limitent les artefacts de la périodisation, mais dont le coût de calcul est plus important. Une autre technique consiste à construire une véritable analyse multirésolution de $L^2[0, 1]$, moyennant une implémentation plus complexe (Cohen et al., 1993).

Exemples d'ondelettes orthogonales

Quelques exemples d'ondelettes orthogonales sont présentés sur la Fig. 2.4. L'ondelette de Meyer est définie par la transformée de Fourier de l'ondelette, qui est à support compact. Même si elle converge vers 0 à l'infini, cette ondelette n'est pas à support compact dans l'espace physique. Elle a un nombre infini de moments nuls, ce qui est la preuve de sa très bonne définition spectrale. En contrepartie, elle n'est pas très bien localisée. L'ondelette de Meyer est une amélioration de l'ondelette de Shannon (non montrée), qui a un spectre plus simple (1 sur une gamme de nombre d'onde, 0 ailleurs). À l'opposé, l'ondelette de Haar a un support compact de très petite taille (2), mais possède un seul moment nul. Elle est définie par un filtre miroir conjugué comptant seulement 2 coefficients. Les principaux inconvénients de cette ondelette sont la discontinuité des fonctions et sa mauvaise définition spectrale (soit son faible nombre de moments nuls).

Les ondelettes de Daubechies ont la propriété d'être les ondelettes qui, à nombre de moments nuls p donné, ont le support de taille minimale. Elles sont définies par un filtre miroir conjugué de taille finie. Cependant, elles ont des caractéristiques peu intéressantes : elles sont fortement dissymétriques et irrégulières. L'exemple de l'ondelette de Daubechies à 3 moments nuls illustre bien ces propriétés. Remarquons que l'ondelette de Haar est en fait l'ondelette de Daubechies à 1 moment nul. À un nombre de moments nuls p donnés, on peut améliorer la régularité et la symétrie de l'ondelette en s'accordant un support de taille supérieure à $2p - 1$. C'est ce qui a été fait pour les symlets (non montrées), pour lesquelles le support est de taille $3p - 1$ en ajoutant une contrainte sur la symétrie. Les Coiflets sont le résultat d'un compromis entre un nombre de moments nuls p , un support de taille $3p - 1$ et l'existence de moments nuls pour la fonction d'échelle. Ainsi, la Coiflet à 4 moments nuls a ces propriétés, et on observe une symétrie quasi-parfaite, ainsi qu'une bonne régularité.

Cette présentation des ondelettes apporte de nouveaux éléments concernant le lien entre les fréquences représentées par une ondelette et son échelle. À cause du principe d'incertitude et malgré l'existence de plusieurs moments nuls, la transformée de Fourier des ondelettes à support compact n'est pas parfaitement localisée : il existe plusieurs lobes dans la haute fréquence. On comprend ainsi que l'écriture spectrale de l'échelle d'ondelette ne se fait pas simplement. Comme on l'a vu précédemment, la seule définition rigoureuse consiste à considérer la transformée de Fourier de l'ondelette. Le passage d'une échelle à la suivante se traduit par la translation du spectre vers les basses fréquences et de la division de sa largeur par 2.

Il existe plusieurs filtres ou ondelettes-mères possibles pour obtenir une base d'ondelettes orthogonales. Leur régularité, la taille de leur support et leur nombre de moments nuls varient d'une ondelette à l'autre. Cependant, il n'existe pas d'ondelette idéale qui aurait des propriétés parfaites dans tous les domaines. Il faut donc choisir une ondelette adaptée à l'objectif de l'étude entreprise en trouvant le meilleur compromis entre ses propriétés. Il existe néanmoins le *principe heuristique de Mallat*, formalisé et démontré par Donoho (1993) :

Bases of smooth wavelets are the best bases for representing objects composed of singularities, when there may be an arbitrary number of singularities, which may be located in all possible spatial positions.

Cela signifie que la représentation en ondelettes d'un signal formé de singularités est creuse. Si

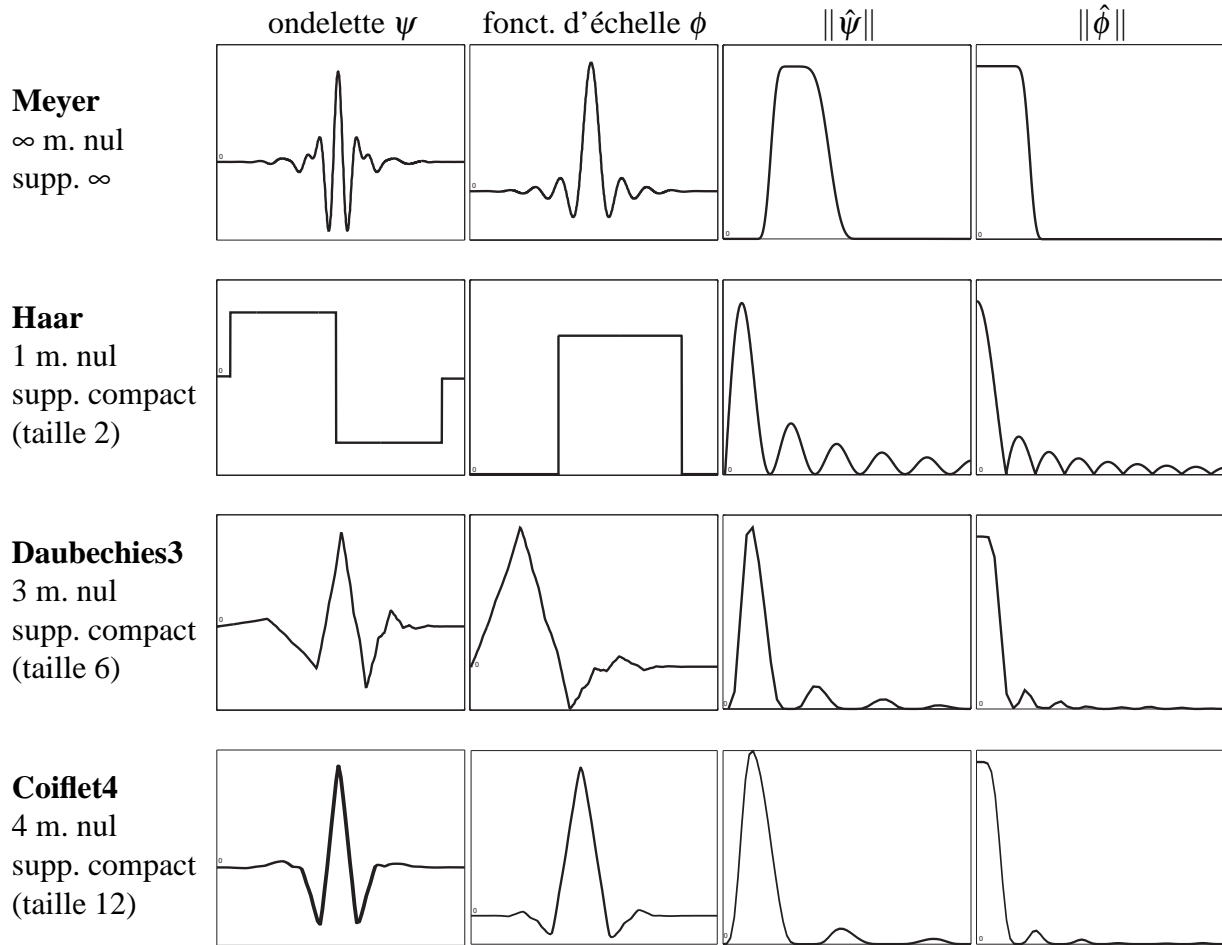


FIG. 2.4: Propriétés de quatre bases d'ondelettes orthogonales : l'ondelette de Meyer, l'ondelette de Haar, l'ondelette de Daubechies à 3 moments nuls et la Coiflet à 4 moments nuls. Sous le nom de chaque ondelette sont inscrits : le nombre de moments nuls de l'ondelette, si le support de l'ondelette est compact ou non, et si oui, la longueur du support. Pour chaque ondelette, sont tracés, de gauche à droite, l'ondelette ψ , la fonction d'échelle associée ϕ , ainsi que le module de leur transformée de Fourier $\|\hat{\psi}\|$ et $\|\hat{\phi}\|$.

on considère que les structures cohérentes sont des singularités dans l'écoulement, ce principe justifie l'utilisation des ondelettes pour leur modélisation.

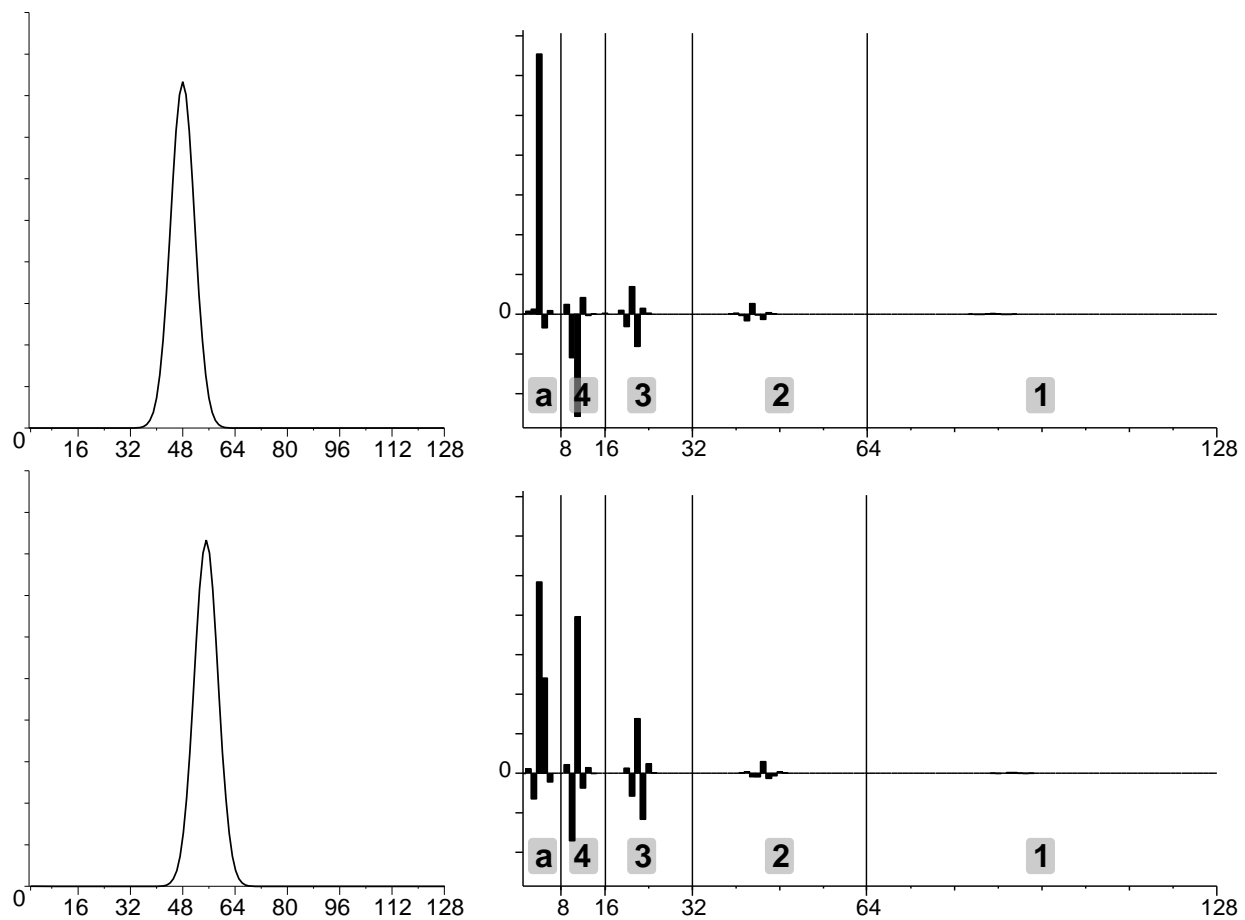


FIG. 2.5: Illustration de l'absence d'invariance par translation de la représentation par une base d'ondelettes orthogonales. Le monopole Gaussien (à gauche) est traduit de 7 points de grille, ce qui change radicalement les coefficients d'ondelettes (à droite). L'ondelette utilisée ici est la Coiflet à 4 moments nuls et on choisit 4 échelles de décomposition. La représentation des coefficients se fait sur une droite, dans le sens décroissant des échelles. L'échelle *a*, (pour approximation) est la partie résiduelle de plus grande échelle après la projection du signal sur les quatre échelles de la décomposition (4, 3, 2, 1).

Invariance par translation et transformée stationnaire

La projection d'un signal sur une base d'ondelettes orthogonales a cependant un inconvénient qui peut être rédhibitoire pour certaines utilisations : la représentation sur une telle base n'est pas invariante par translation. L'invariance par translation signifie que la projection sur la base du translaté d'un signal est le translaté de sa projection. Cette propriété existe naturellement pour la représentation en points de grille, ainsi que pour la représentation de Fourier, pour laquelle une

translation agit sur la phase mais pas sur le module. La Fig. 2.5 illustre l'absence d'invariance par translation par la représentation en ondelettes de la même fonction Gaussienne traduite de quelques points de grille. La transformée en ondelettes est très différente pour les deux traduits, tant pour les échelles que pour les coefficients où elle se projette le mieux. Le calcul théorique ne permet pas d'aboutir à une relation simple entre la projection du traduit et la projection de l'original.

Pour résoudre cette difficulté, une méthode possible est de recourir à une certaine dose de redondance d'information en définissant la transformée en ondelettes stationnaires (SWT pour *Stationary Wavelet Transform*, Coifman et Donoho, 1995), aussi appelée *transformée non décimée*, *transformée quasi-continue* ou *algorithme à trou*. Partant d'une transformée en ondelettes orthogonales, la SWT consiste à calculer les transformées associées à toutes les translations possibles de la base. L'inverse de la transformée stationnaire consiste à effectuer la moyenne de tous les champs reconstruits par l'inverse des transformées orthogonales. Il est important pour la suite de voir que parmi les ondelettes SWT, il existe plusieurs collections qui forment des bases orthogonales OWT (Fig. 2.6).

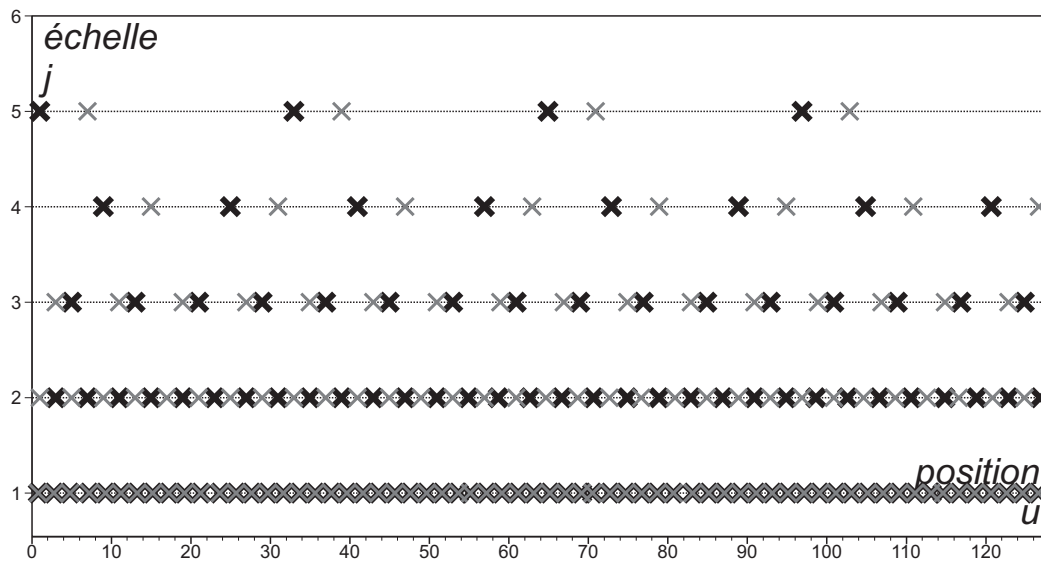


FIG. 2.6: Mode de représentation de la transformée stationnaire d'un signal à une dimension. Chaque coefficient associé à la position u et à l'échelle j peut être affiché sur ce plan au point (u, j) . Sur la présente figure, on voit la position de deux bases d'ondelettes orthogonales OWT différentes, l'une en trait gras noir, l'autre en trait gris. Ces deux bases sont le traduit l'une de l'autre.

La transformée stationnaire peut aussi être calculée par les filtres miroirs conjugués. Pour cela, il suffit de conserver tous les coefficients à chaque échelle en n'appliquant pas la décimation utilisée pour la transformée en ondelettes orthogonales. Cela revient à appliquer une simple convolution en cascade par les filtres miroirs conjugués (Fig. 2.3). Le coût de ce calcul de la transformée stationnaire est en $O(N \log N)$, comme une transformée de Fourier rapide. La transformée rapide non décimée sera utilisé pour le calcul des transformées stationnaires dans la

présente thèse.

Ondelettes à n dimensions et sur la sphère

Dans un espace à deux dimensions (x, y) , la construction de bases d'ondelettes est *a priori* compliquée par l'existence d'un degré de liberté supplémentaire à la translation et la dilatation : la rotation. Une approche pour construire une base d'ondelettes orthogonales à 2 dimensions consiste à appliquer une transformée en ondelettes unidimensionnelles en chaque direction x et y échelle par échelle (voir la Fig. 2.7). Si l'ondelette est orthogonale, alors le résultat à deux dimensions est aussi une base d'ondelettes orthogonales. Dans ce cas, 4 familles de fonctions directionnelles sont nécessaires : les ondelettes horizontales, diagonales et verticales, et l'approximation. Ces fonctions peuvent s'écrire comme le produit de l'ondelette-mère et de la fonction d'échelles selon les directions x et y . Ce sont des directions nommées sur un plan, et non dans l'espace (de l'atmosphère). Les propriétés de compacité et de régularité de l'ondelette et de la fonction d'échelle se transmettent naturellement aux fonctions bidimensionnelles (Fig. 2.8). Cette approche est généralisable à toute dimension $n \geq 2$. Néanmoins, le nombre de directions possibles croît très rapidement avec la dimension ($2^n - 1$ pour une dimension n).

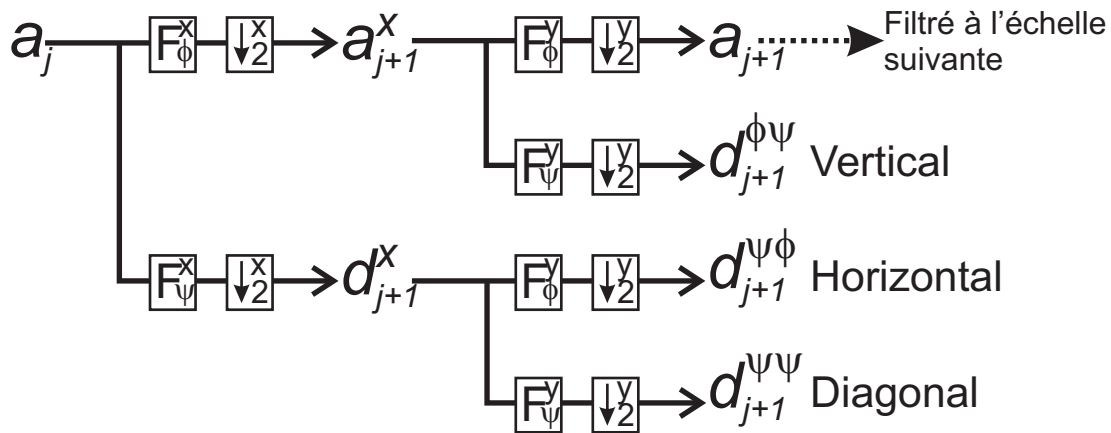


FIG. 2.7: Illustration du principe de la transformée en ondelettes bidimensionnelles à l'échelle $j + 1$. Le filtrage est appliqué successivement sur les directions x et y , ce qui donne lieu à 4 types d'ondelettes : les verticales, horizontales et diagonales, et la partie approximation qui est utilisée en entrée du filtrage à l'échelle suivante.

Si des bases d'ondelettes orthogonales sur la sphère avaient été disponibles et facilement utilisables, l'étude des structures cohérentes d'échelle synoptique les aurait naturellement utilisées. Mais la théorie des bases d'ondelettes orthogonales sur la sphère n'est pas aussi développée qu'en géométrie plane ; c'est pourquoi il est préférable pour la présente étude de travailler sur un plan. Des bases biorthogonales sur la sphère existent (Schröder et Sweldens, 1995). La biorthogonalité consiste à utiliser des fonctions différentes pour la transformée directe et la transformée inverse. Freedman et Schreiner (1998) ont construit une analyse multirésolution basée sur une ondelette à support non compact, similaire à l'ondelette de Shannon. Récemment, Rosca (2005) a mis en

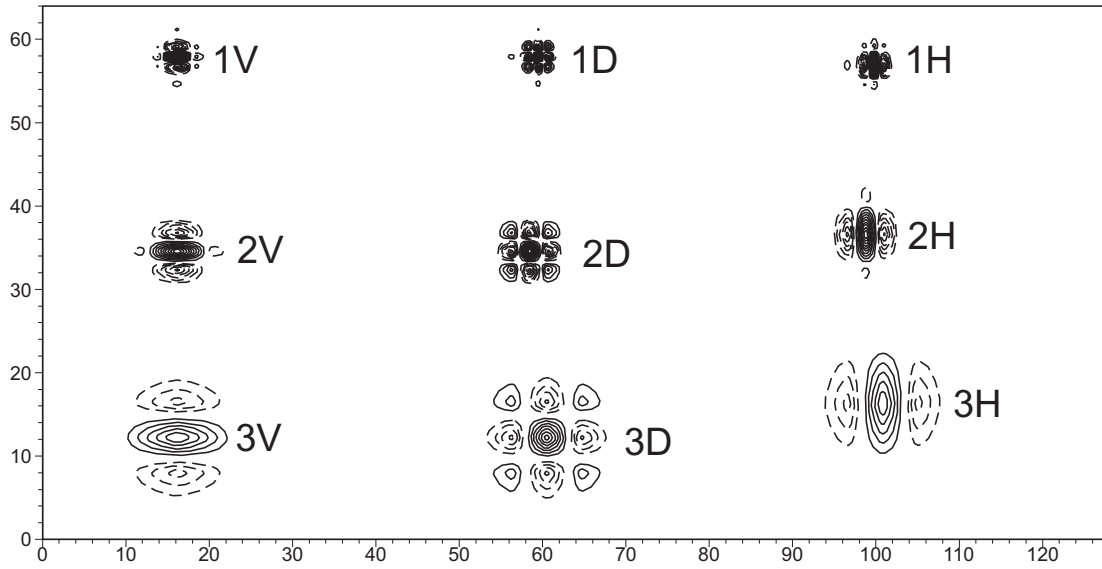


FIG. 2.8: Ondelettes bidimensionnelles de l'échelle 1 à 3, pour les trois directions V, D et H, sur un domaine de taille 128×64 . La valeur de chaque coefficient d'ondelette est la même pour toutes les ondelettes tracées.

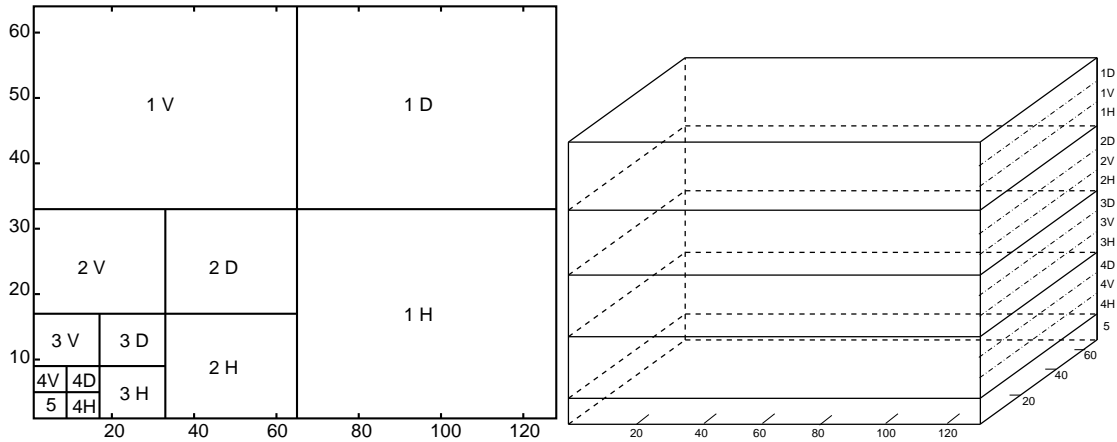


FIG. 2.9: Organisation des coefficients d'ondelettes pour la transformée OWT (à gauche) et la transformée SWT (à droite). Pour un domaine initial de taille $n_x \times n_y$, le nombre de coefficients de la transformée OWT à toute échelle J est $n_x \times n_y$ (base), alors que pour la transformée SWT, il y a $n_x \times n_y \times (3J + 1)$ coefficients (redondance).

place une telle analyse grâce à une ondelette à support compact, en utilisant une grille triangulaire sur la sphère. Il y a ici quasi-orthogonalité, c'est-à-dire que deux fonctions appartenant à des échelles différentes sont orthogonales, mais pas deux fonctions à une même échelle.

2.1.2 État de l'art en turbulence développée

La théorie des ondelettes a beaucoup profité à la compréhension et à la modélisation de la turbulence développée. La localisation spatiale et spectrale des ondelettes en fait un outil privilégié pour étudier les propriétés locales de la turbulence, et en particulier des structures cohérentes. En effet, dans ce cas, la transformée en ondelettes permet de représenter localement le spectre d'une structure, caractéristique fondamentale pour décrire correctement sa dynamique. En se basant sur ses premiers travaux, Farge (1992) proposa un ensemble d'idées sur ce que les ondelettes pourraient apporter à la compréhension et la modélisation de la turbulence. La prévision de l'utilité de ces méthodes s'avéra juste.

En particulier, Chassaing (2000, p. 273) rappelle que plusieurs travaux ont tâché d'extraire le champ cohérent d'un champ turbulent. Une des approches les plus intéressantes pour traiter ce problème est d'utiliser la représentation dans une base d'ondelettes orthogonales (Farge et al., 1999), ce qui permet de séparer le champ turbulent en une partie cohérente, constituée principalement des structures cohérentes, et d'un champ incohérent aux propriétés statistiques homogènes isotropes. Cette technique est inspirée de la méthode de filtrage non linéaire proposée par Donoho (1993) et Donoho et Johnstone (1994).

Ils s'intéressent au problème de l'estimation statistique, ce qui consiste à déduire le signal h_i , à partir du signal observé $\{g_i, 1 \leq i \leq N\}$ corrompu par un bruit Gaussien identiquement distribué (donc blanc) ε_i :

$$g_i = h_i + \varepsilon_i \quad (1 \leq i \leq N), \quad \varepsilon_i \sim \mathcal{N}(0, \sigma).$$

Autrement dit, il s'agit de débruiter le signal g_i . Donoho et Johnstone (1994) ont montré que le seuillage des composantes du signal observé sur une base permet une estimation optimale, au sens de la minimisation de l'erreur de reconstruction. Il est nécessaire de choisir une base adéquate sur laquelle projeter le signal. Si celui-ci est irrégulier et comprend principalement des singularités, une base d'ondelettes est adaptée. En revanche, si le signal est plutôt ondulatoire et faiblement localisé, une base spectrale devrait convenir. Dans le cas d'un champ turbulent constitué de structures cohérentes, Farge et al. (1999) utilisent une ondelette spline, donc assez régulière.

Le seuil optimal pour exercer un tel débruitage s'écrit $\sqrt{2\sigma^2 \ln N}$, où N est le nombre de point de grille sur lequel signal est échantillonné et σ^2 est la variance du bruit. Or, le bruit n'étant pas connu *a priori*, le seuil optimal doit être déterminé par une méthode numérique itérative, proposée par Azzalini et al. (2005) :

\tilde{g} : coefficients d'ondelettes du champ g , à séparer en :

$\tilde{g}_>$, partie cohérente

$\tilde{g}_<$, partie incohérente.

N : taille du champ (qui est aussi le nombre de coefficients de la base).

$\sigma^2[.]$: variance sur le domaine de calcul de la fonction en argument.

Initialisation :

$\tilde{g}_> = 0$, la partie cohérente (au-dessus du seuil)

$\tilde{g}_< = \tilde{g}$, la partie incohérente (en dessous du seuil)

$s = (2\sigma^2[g_<] \ln N)^{1/2}$ et $s_0 = 0$: seuils initiaux.

Tant que $s > s_0$

s_0 prend la valeur de s

Appliquer le seuil s sur $|\tilde{g}_<|$:

- les coefficients au-dessus de s sont ajoutés à $\tilde{g}_>$

- les coefficients en dessous de s restent dans $\tilde{g}_<$

$s = (2\sigma^2[g_<] \ln N)^{1/2}$

Fin Tant que

Azzalini et al. (2005) montrent que le seuil $s = (2\sigma^2[g_<] \ln N)^{1/2}$ est une fonction décroissante du nombre d'éléments de $g_<$ et par conséquent, s décroît avec le nombre d'itérations. s étant supérieur à 0, et le champ étant de taille finie, l'algorithme s'arrête forcément à une valeur positive ou nulle.

L'optimalité du seuil résultant n'est pas garantie *a priori*. Certes, la valeur du seuil résultant de l'algorithme $s = (2\sigma^2[g_<] \ln N)^{1/2}$ est conforme au théorème de Donoho (1993), mais il est important de vérifier que le filtrage permet bien de retirer le bruit blanc Gaussien ε . Sur un cas d'étude idéalisé où ce bruit est contrôlé, Azzalini et al. (2005) montrent que l'algorithme converge vers une valeur proche de l'optimum, et que le résultat est d'autant meilleur que la projection du signal sur la base d'ondelettes est creuse.

Sur un champ de vorticité issu de la turbulence développée, un tel seuillage permet de conserver dans la partie cohérente 99,2% de l'énergie et 94% de l'ensrophie en gardant les 0,7% coefficients d'ondelettes les plus forts (Farge et al., 1999). De plus le champ incohérent est homogène isotrope et suit effectivement une distribution Gaussienne. En météorologie synoptique, les propriétés du bruit devront aussi être analysées. Ces propriétés ont permis en particulier de simuler les écoulements turbulents par une nouvelle technique, la CVS, pour *Coherent Vortex Simulation* (Farge et al., 1999). Celle-ci consiste à résoudre de façon déterministe l'évolution de la partie cohérente. L'effet moyen du champ incohérent sur l'écoulement cohérent est pris en compte par une paramétrisation dépendant de ses propriétés statistiques.

La méthode de seuillage itératif permet donc de déterminer de façon objective un seuil pour filtrer un bruit blanc Gaussien d'un champ. En turbulence, cette technique a été appliquée pour séparer les parties cohérentes et incohérentes du champ. Ce seuil sera appelé *seuil itératif*.

Le filtrage décrit ici repose sur la transformée orthogonale OWT. Or, Coifman et Donoho (1995) ont aussi proposé d'utiliser la transformée stationnaire SWT pour débruiter le champ. Le

résultat attendu est un champ plus lisse et moins dépendant du choix de la translation de la base. En revanche, il ne peut être question de compression d'information car la SWT est fortement redondante. Pour obtenir le seuil itératif appliqué aux coefficients SWT, il suffit d'utiliser le même seuil que celui obtenu pour une de ses bases OWT.

2.1.3 Cadre d'étude météorologique

La géométrie du problème

En météorologie dynamique, l'intérêt se porte sur les structures cohérentes de tourbillon potentiel qui sont d'échelle synoptique, soit de taille comprise entre 500 et 3000 km environ. Comme les bases d'ondelettes orthogonales utilisées s'appliquent à des champs plans, il est nécessaire de les projeter depuis la sphère. Pour étudier les latitudes moyennes, une projection de Lambert est adéquate car elle préserve les angles (elle est conforme) et les variations du facteur d'échelle sont limitées. Afin de s'intéresser aux régions de Atlantique Nord et la mer Méditerranée, une projection de Lambert pour laquelle le cône est tangent à la sphère à la latitude $45^\circ N$ sera utilisée. Le domaine résultant (Fig. 2.10) comporte 128 points de grille en abscisse et 64 en ordonnée. La résolution sur le plan est de 118 km. La résolution équivalente sur la sphère s'obtient par division par le facteur d'échelle m . Le facteur d'échelle, supérieur ou égal à 1, varie peu sur le domaine, excepté au nord de la latitude $75^\circ N$. Sur le *storm-track* Atlantique, le jet subtropical et la Méditerranée, les variations du facteur d'échelle sont inférieures à 5%. L'isotropie de la grille et les variations du facteur d'échelle ayant été contrôlées, les propriétés de la représentation en ondelettes conservent leur sens, en particulier la notion d'échelle d'ondelette.

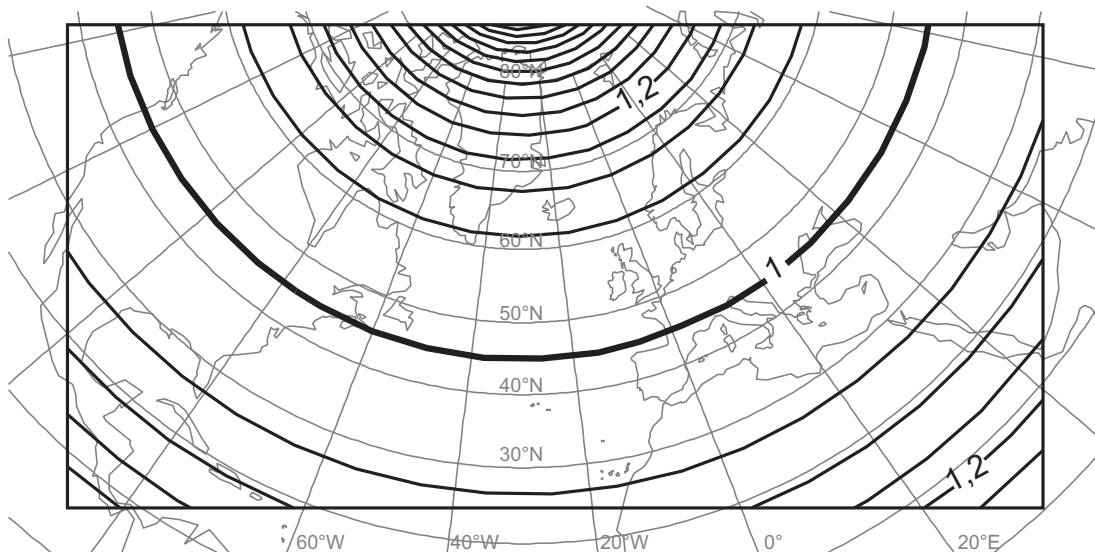


FIG. 2.10: Domaine (intérieur du rectangle noir) où la transformée en ondelettes est appliquée. Les valeurs du facteur d'échelle associé à la projection conforme (Lambert, cône tangent à $45^\circ N$) apparaissent en isolignes noires (intervalle 0,05).

La base d'ondelettes

Le choix de la base d'ondelettes est un point crucial à discuter. On a vu pour le filtrage qu'il est essentiel que l'ondelette soit régulière. En outre, pour extraire des structures bien localisées, il faut un support compact de taille limitée, tout en ayant un nombre de moments nuls conséquent, au moins 3. L'ondelette de Daubechies à 3 moments nuls ne convient pas car elle est trop irrégulière. Le résultat de ce compromis permet de choisir la Coiflet à 4 moments nuls qui a aussi l'avantage d'être quasiment symétrique.

Le champ synoptique initial est à quatre dimensions (x, y, z, t) ; on pourrait donc appliquer une transformée de dimension 4 au plus. Mais, bien que les structures cohérentes météorologiques aient une extension verticale, on supposera la séparabilité entre les coordonnées horizontales et la coordonnée verticale telle que la transformée en ondelettes soit uniquement appliquée sur l'horizontale. Cela est cohérent avec l'hypothèse hydrostatique et avec l'utilisation des méthodes spectrales en météorologie.

Les champs à analyser

Dans un but de séparation des parties cohérentes et incohérentes de champs météorologiques, il faut se placer dans un contexte proche de celui de la turbulence développée. Le filtrage non linéaire sera donc appliqué à des champs de tourbillon potentiel sur une surface isentrope, champ à conservation lagrangienne si on suppose l'absence de libération de chaleur latente et de frottement. La notion de structure cohérente est ainsi conservée.

On a vu qu'en théorie le filtrage non linéaire s'applique si le champ incohérent est un bruit blanc Gaussien. Or, à la fois pour des raisons théoriques et numériques, il n'est pas garanti qu'une telle propriété existe pour les champs météorologiques. Tout d'abord, l'existence de courants-jets moyens et la non-équivalence entre les directions longitudinales et latitudinales font que l'homogénéité et l'isotropie des champs ne sont pas garanties. De plus, les champs analysés seront le résultat de cycles d'assimilation variationnelle qui supposent l'existence de corrélations spatiales à longue portée. Afin de limiter le bruit créé par les interpolations lors du passage des champs sphériques aux champs projetés, il est nécessaire de mettre en œuvre une méthode d'interpolation adaptée. Ce sont des interpolations spectrales, c'est-à-dire que les fonctions interpolantes sont les harmoniques sphériques, fonctions de base du champ spectral. Bien que l'interpolation soit ainsi correctement traitée, cette source de bruit ne peut être complètement éliminée.

2.1.4 Étude de l'extraction sur des champs dynamiques météorologiques

Le seuillage des coefficients d'ondelettes appliqué aux champs météorologiques doit permettre de montrer l'analogie avec la turbulence en séparant le champ en une partie cohérente et une partie incohérente, ce qui valide l'utilisation des ondelettes pour représenter les champs météorologiques. Pour ce faire, les champs de tourbillon potentiel sur la surface isentrope 315 K issus de la réanalyse ERA40 sont exploités, entre le 14 décembre 1999 à 00 TU et le 14 janvier 2000 à 18 TU par pas de 6 heures (soit 128 instants). Cette période est particulièrement intéressante car très active sur le plan synoptique. La troncature des champs d'ERA40 est T159,

ce qui correspond à une résolution de 178 km à la latitude 45° .

Filtrage non linéaire d'un champ

De façon similaire à l'article présenté dans le Chap. 4 plus loin, le seuillage sur les coefficients OWT et SWT est représenté sur la Fig. 2.11, auquel s'ajoutent les distributions présentées sous forme d'histogrammes (Fig. 2.12). Les diagnostics utilisés seront la norme Euclidienne au carré du champ, qui sera abusivement appelée *énergie*, et la capacité de reconstruction des maxima du champ original. On testera aussi la normalité du champ incohérent par des scores de Skewness et Kurtosis (voir Annexe 2.).

Le seuillage itératif sur les coefficients OWT permet de conserver 99,7% de l'énergie dans les 10,5% coefficients les plus forts. L'apparence générale du champ cohérent (Fig. 2.11) est préservée, en particulier ses valeurs maximales. L'histogramme (Fig. 2.12) des champs associés confirme la bonne reconstruction par le champ cohérent. De plus, la distribution du résidu dans le plan log-linéaire est assez proche d'une forme parabolique, ce qui suggère une distribution Gaussienne. Effectivement, la Skewness et la Kurtosis du champ incohérent sont respectivement $-0,03$ et $4,6$, proches des valeurs attendues pour une loi normale (0 et 3). Cependant, afin de tester la significativité de ces valeurs, il est préférable de calculer les scores de Skewness associé (Annexe 2.). Le score de Skewness est dans l'intervalle de confiance à 95% pour accepter l'hypothèse d'une distribution Gaussienne, au contraire du score de Kurtosis.

Ainsi, il est déjà possible de se confronter aux résultats de la turbulence développée. La capacité de compression par les ondelettes est moindre dans le cadre météorologique (on garde 10% des coefficients alors qu'on en garde moins de 1% en turbulence). Une explication à cela peut provenir du fait qu'il demeure une partie ondulatoire dans le champ de tourbillon potentiel d'altitude. Les ondes de Rossby de grande échelle sont marquées par une zone de fort gradient dont la projection sur la base d'ondelettes est forte. La partie incohérente est proche d'une distribution Gaussienne, même si le score de Kurtosis n'est pas dans l'intervalle de confiance. Une différence importante vient des propriétés du champ de tourbillon potentiel. Celui-ci est faiblement négatif, ce qui crée une distribution asymétrique, contrairement au champ de tourbillon relatif en turbulence. Cependant, cela n'empêche pas la symétrie du champ incohérent, puisque sa moyenne est nulle et sa Skewness conforme à une loi normale centrée.

Les résultats du seuillage itératif sur les coefficients SWT (Fig. 2.11) sont assez conformes au seuillage sur les coefficients OWT. 99,5% de l'énergie est préservée. La Skewness et la Kurtosis du champ incohérent sont respectivement $0,18$ et $4,3$, ce qui fait sortir les deux scores de l'intervalle de confiance. En revanche, le champ incohérent est moins intense localement, et le champ cohérent semble être plus lisse. En particulier, la préservation du filament situé au large du Canada est meilleure avec le seuillage SWT. On retrouve ainsi les propriétés du filtrage SWT attendues par Coifman et Donoho (1995).

L'exemple fourni par ce champ permet d'illustrer la convergence de la méthode de seuillage. La méthode repose sur un seuil appliqué sur la valeur absolue des coefficients d'ondelettes. Il est donc naturel de classer les coefficients d'ondelettes du champ par ordre décroissant de leur valeur absolue. La distribution des coefficients ainsi obtenue est tracée dans un plan donnant la valeur absolue du coefficient en fonction de son classement dans l'ordre décroissant (Fig. 2.13).

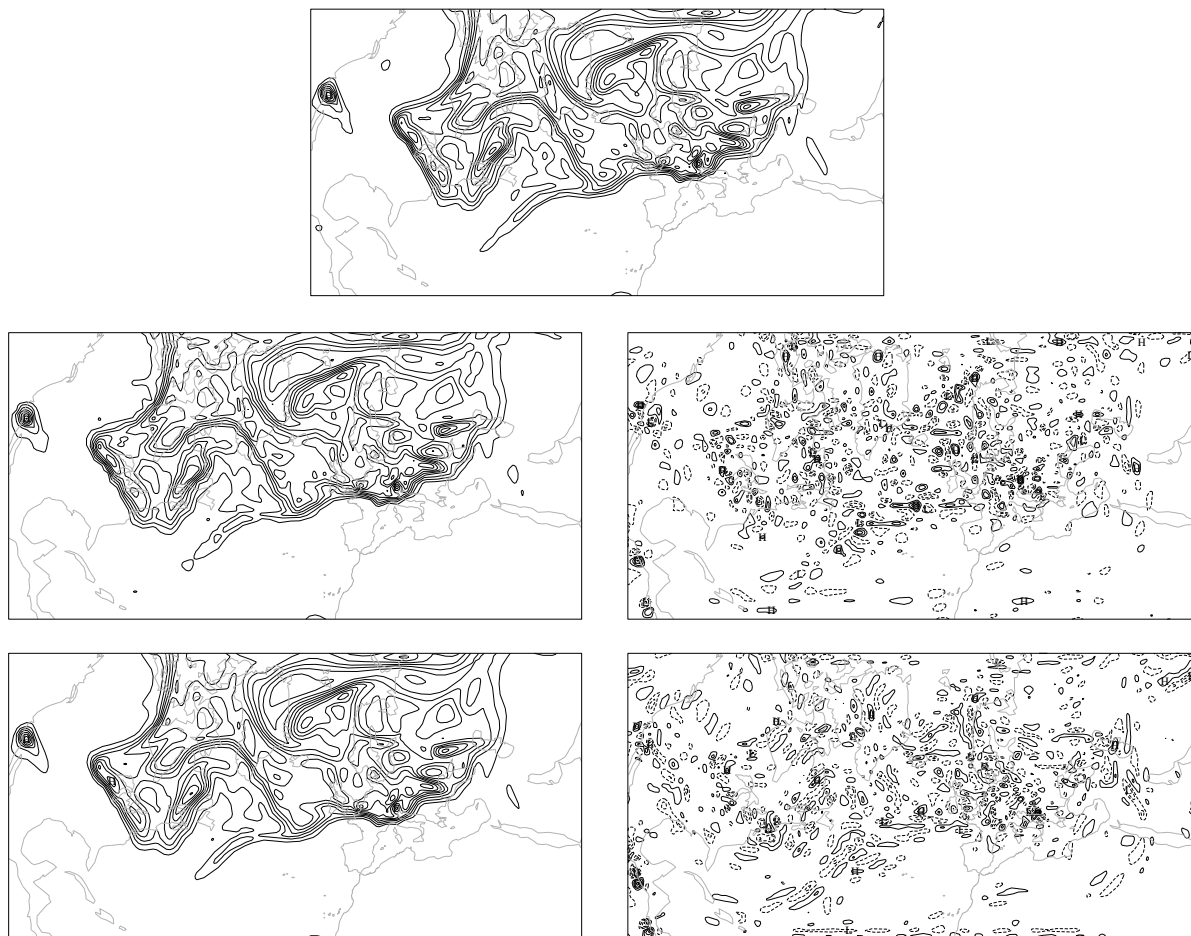


FIG. 2.11: Résultat du filtrage non linéaire appliqué au champ de tourbillon potentiel sur l'isentrope 315 K, le 27 décembre 1999 à 06 TU. Le champ original (en haut) est filtré par le seuillage itératif sur les coefficients OWT (au centre) et SWT (en bas). À gauche apparaissent les champs cohérents et à droite les champs incohérents. Intervalle des isolignes : 1 pvu pour le champ original et les champs cohérents, 0,1 pvu pour les champs incohérents.

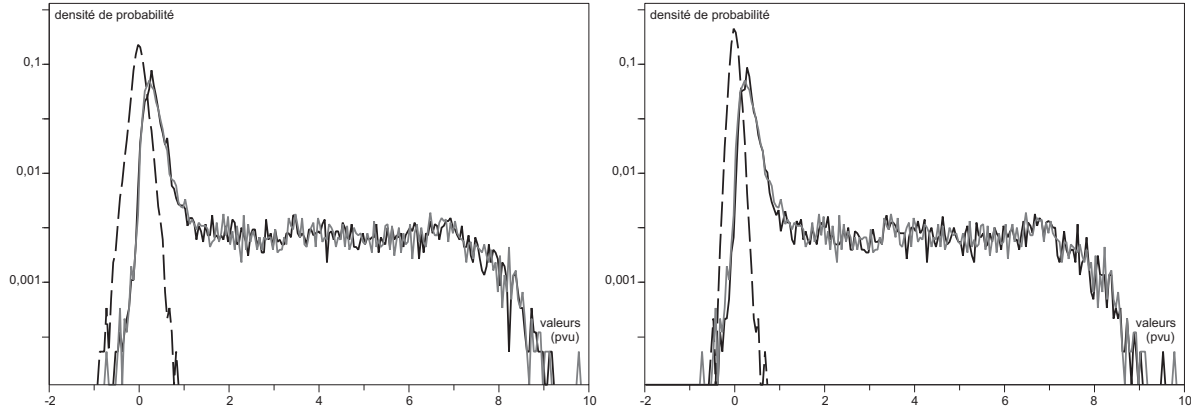


FIG. 2.12: Histogrammes des champs issus des seuillages itératifs sur les coefficients OWT (à gauche) et SWT (à droite). Le champ original (gris) et superposé au champ cohérent (trait plein noir) et incohérent (pointillé noir). En abscisse sont indiquées les valeurs du champ (unité : 1 pvu) et en ordonnée (échelle logarithmique), la fréquence d'occurrence de la valeur sur la grille.

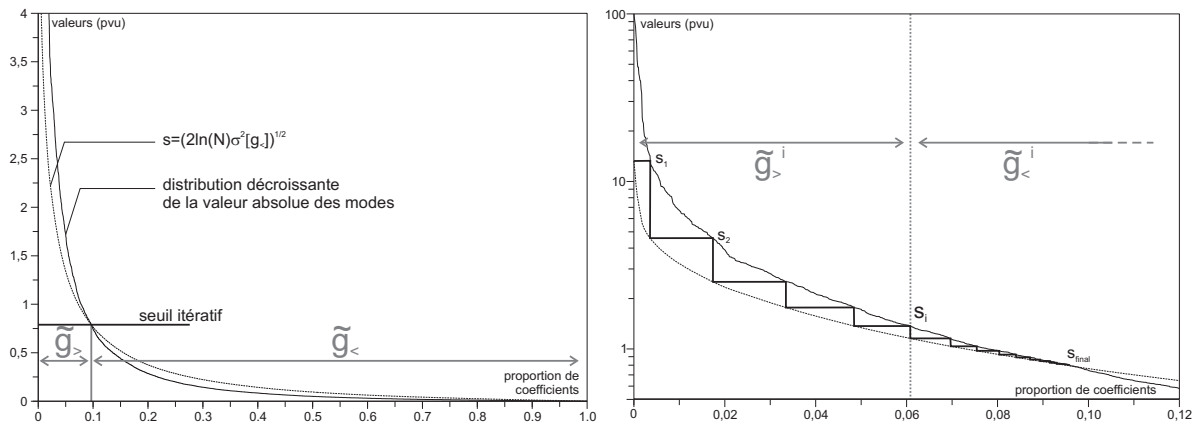


FIG. 2.13: Illustration du principe de la convergence du seuil itératif. Les indices i des coefficients d'ondelettes sont affichés en abscisse sous la forme de proportion i/N . Ces coefficients sont classés par ordre décroissant de la valeur absolue de leur valeur. L'ordonnée repère la valeur (unité : pvu) des coefficients d'ondelettes. Dans ce plan sont tracés la distribution des coefficients d'ondelettes (trait plein) et la fonction de seuillage $s = (2\sigma^2[g_<]\ln N)^{1/2}$. Les fonctions tracées ici sont associées au champ de la Fig. 2.11. La figure de gauche rend compte de l'allure générale des deux fonctions. La figure de droite, zoom de celle de gauche et dont l'ordonnée est en échelle logarithmique, permet de comprendre le processus itératif qui aboutit à la convergence du seuil.

Appliquer un seuil sur les coefficients revient à reporter la valeur du seuil sur cette fonction, puis sur l'axe des abscisse afin de considérer à gauche les valeurs supérieures au seuil ($g_{>}$) et à droite les valeurs inférieures au seuil ($g_{<}$). Il est ainsi possible de tracer la fonction $s = (2\sigma^2[g_{<}] \ln N)^{1/2}$ dans le même plan. Le résultat du seuillage itératif sera un point d'intersection entre les deux courbes. Azzalini et al. (2005) ont démontré que la fonction s est décroissante. L'autre courbe l'est aussi par construction. Par conséquent, l'algorithme itératif convergera vers le premier point d'intersection entre ces deux courbes, c'est-à-dire vers celui qui donne le taux de compression maximal, s'il y en a plusieurs. Un tel point d'intersection existe toujours, puisque les deux courbes se rejoignent au point $(0, 1)$. Dans ce cas, la solution donnée considère que le champ cohérent est le champ original et qu'il n'y a pas de champ incohérent.

Sans en être une démonstration rigoureuse, la Fig. 2.13 permet de montrer l'existence d'au moins une solution et la convergence de l'algorithme itératif.

Quelques diagnostics sur une période longue

Afin de donner une signification statistique et valider la méthode de seuillage, celle-ci est appliquée sur les 128 instants consécutifs (14/12/1999 - 14/01/2000 par 6 h).

Pour les seuillages itératifs OWT et SWT, les diagnostics de répartition de l'énergie (Fig. 2.14) et de normalité de la partie incohérente (Figs. 2.15 et 2.16) sont conformes aux résultats montrés sur le cas d'étude unique. Le seuillage OWT conserve davantage d'énergie dans la partie cohérente que le seuillage SWT, mais l'énergie de la partie incohérente est plus faible pour le seuillage SWT. Il faut rappeler que la transformée SWT n'étant pas orthogonale, l'énergie totale n'est pas conservée, même si la perte est faible (environ 0,3%). Pour les deux transformées, la normalité de la partie incohérente n'est pas vérifiée à cause du score de Kurtosis.

Un test concernant la préservation des maxima locaux a aussi été fait (Fig. 2.17). Il montre que la reconstruction d'un maximum local est d'autant meilleure qu'il est intense. Le seuillage SWT offre une amélioration significative de la reconstruction des maxima en terme d'erreur relative. Ce résultat est certainement à relier à un problème qui sera traité plus loin, à savoir que la reconstruction d'une structure locale n'est possible que si la translation de la base d'ondelettes est adaptée pour elle.

Comparaison avec un filtrage spectral

Traditionnellement, les méthodes utilisées pour filtrer un champ météorologique utilisent la représentation spectrale sur laquelle on applique un filtre basse-fréquence. Une comparaison du seuillage itératif OWT avec le filtrage spectral est proposée sur les Figs. 2.18 et 2.19. Un seuillage des coefficients spectraux y est aussi montré. On voit que le seuillage des coefficients d'ondelettes permet une bien meilleure compression du signal et une meilleure conservation de l'énergie. L'ensemble des 128 cas étudiés montre que le taux de compression obtenu est robuste et significatif. De plus, les maxima locaux du champ sont mieux préservés par le filtrage ondelette que par un filtrage spectral (Fig. 2.19), pour un même taux de compression. Certains maxima ne sont reconstruits qu'à 70% avec la troncature spectrale, alors que le seuillage OWT le reproduit correctement. La Fig. 2.20 montre que le filtrage spectral a le défaut de lisser les gradients. Cela

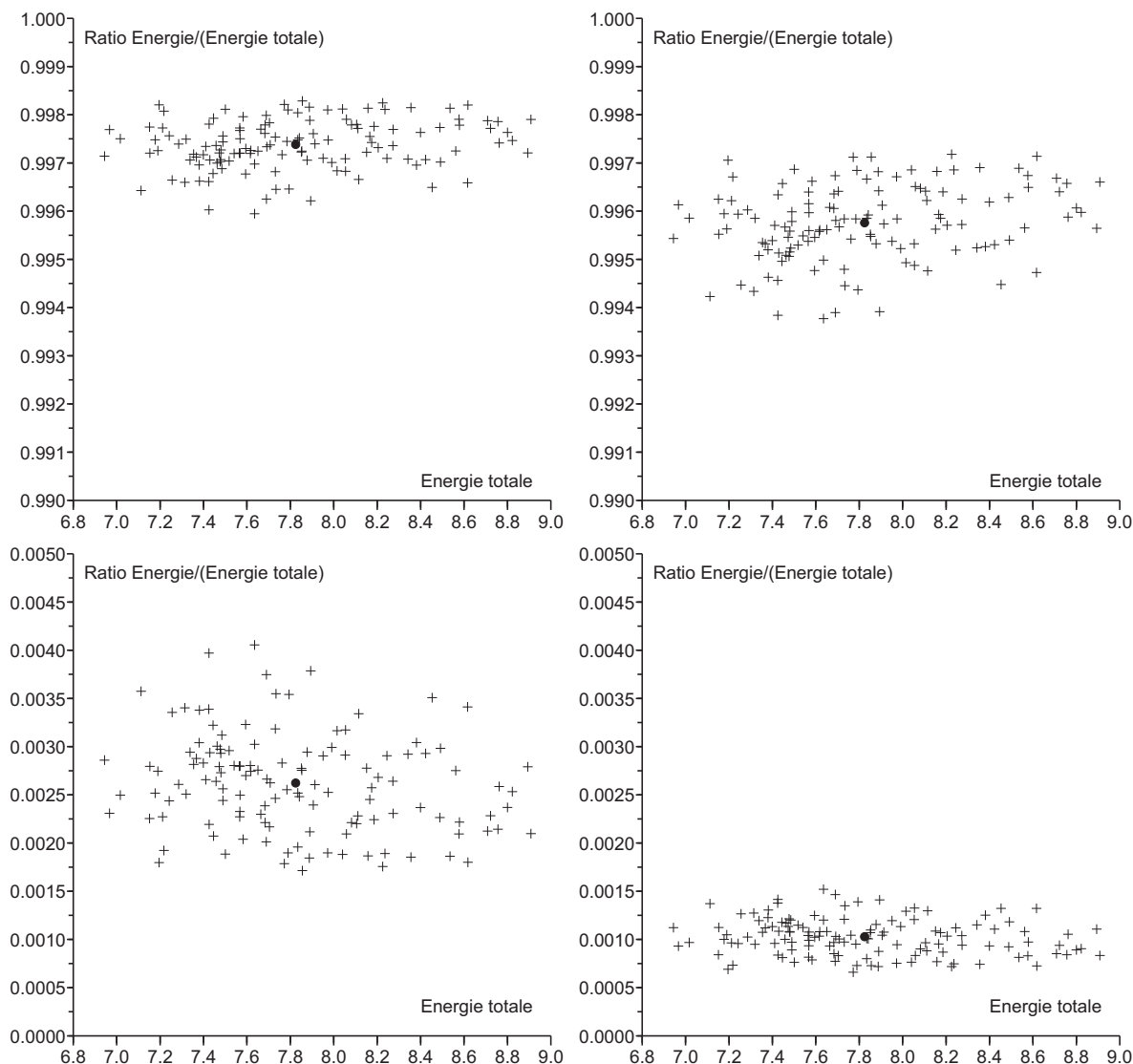


FIG. 2.14: Répartition de l'énergie du champ pour la partie cohérente (figures du haut) et la partie incohérente (figures du bas), pour le filtrage des coefficients OWT (à gauche) et SWT (à droite), pour 128 instants calculés (un point par instant). L'énergie est ici la norme au carré des valeurs du champ. En abscisse : énergie totale (unité : 10^4 pvu^2), et en ordonnée : rapport entre l'énergie du champ filtré et l'énergie totale. La moyenne des valeurs affichées est représentée par un point noir.

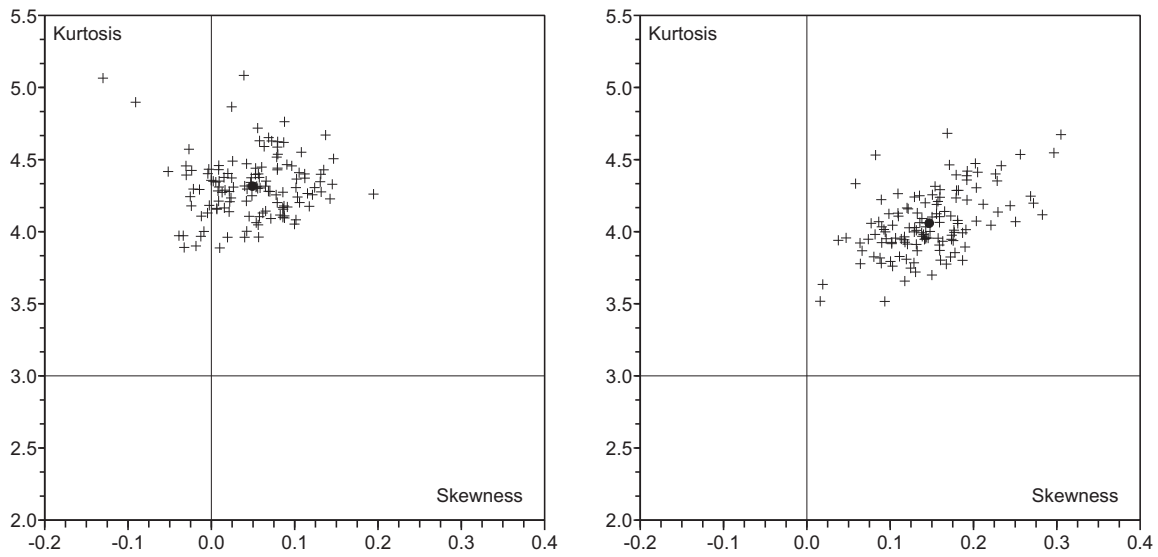


FIG. 2.15: *Skewness (abscisse) et Kurtosis (ordonnée) de la partie incohérente pour le filtrage OWT (à gauche) et SWT (à droite). La moyenne de ces valeurs apparaît par un point noir. Les valeurs pour une loi normale sont représentés par les segments qui se croisent au point (0,3).*

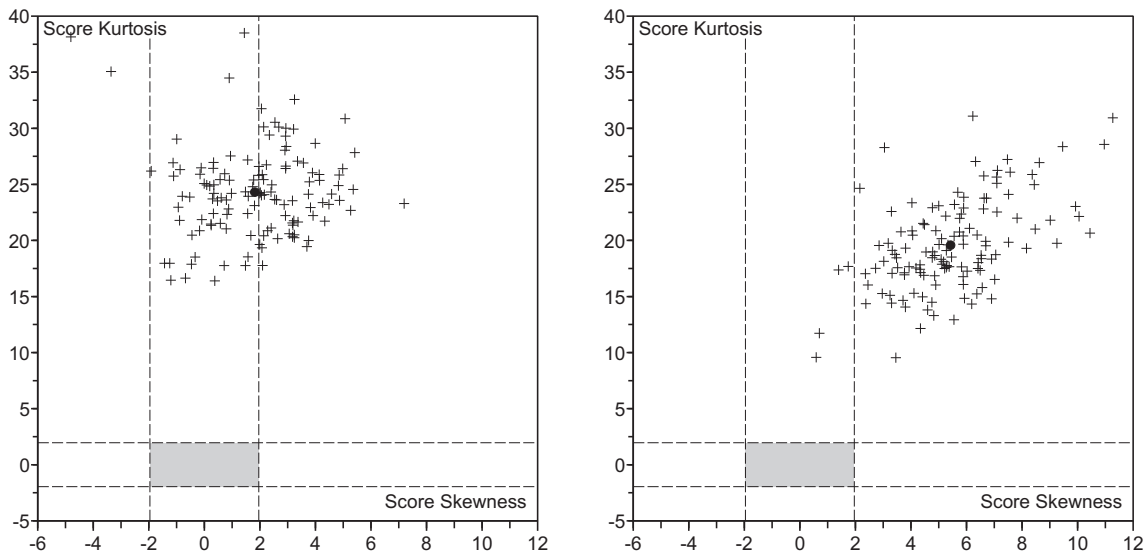


FIG. 2.16: *Scores de la Skewness (abscisse) et Kurtosis (ordonnée) de la partie incohérente pour le filtrage OWT (à gauche) et SWT (à droite). Voir l'Annexe 2. pour la définition de ces scores. La moyenne de ces valeurs apparaît par un point noir. Les intervalles de confiance à 95% sont délimités par les segments en pointillé. La région de confiance pour la normalité de la partie incohérente est le rectangle grisé, qui n'est jamais atteint.*

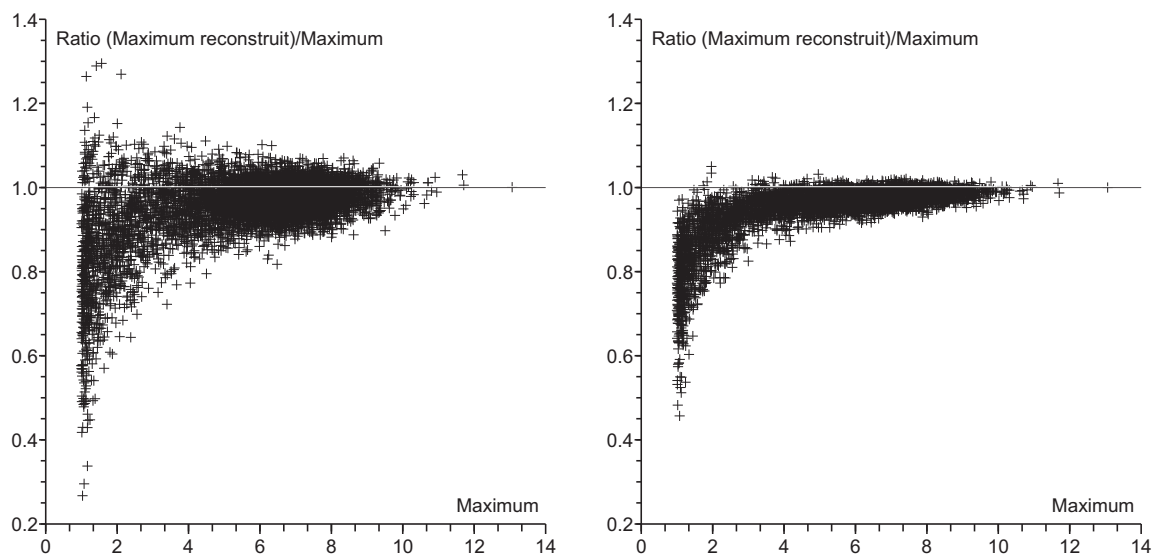


FIG. 2.17: Reconstruction des maxima relatifs du champ après filtrage (OWT à gauche, SWT à droite) en fonction du maximum. Pour chaque maximum local supérieur à la valeur 1 pvu sur le champ original (en abscisse, unité 1 pvu), on repère en ordonnée le rapport entre la valeur du champ au même point dans le champ filtré cohérent et la valeur du maximum (en ordonnée).

explique la mauvaise reconstruction du 43^e maximum (Fig. 2.19), qui correspond au monopole isolé situé en Californie du sud. On repère aussi la très mauvaise reconstruction du filament au large du Canada. De plus, avec les représentation spectrale, des oscillations non désirées peuvent apparaître (phénomène de Gibbs), défaut qui existe aussi avec la représentation en ondelettes, mais qui est plus limité dans l'espace et en intensité.

Tous ces résultats sont à mettre en relation avec l'heuristique de Mallat. Les champ analysés sont constitués de structures locales intenses, ce qui rend leur représentation creuse dans une base d'ondelettes, mais pas dans la base spectrale.

Pour conclure sur le filtrage, il est possible d'appliquer cette méthode de filtrage à toutes sortes de champs météorologiques sur des domaines limités. Certains champs météorologiques, en particulier issus de modèles à haute résolution, sont particulièrement bruités. Des troncatures spectrales sont parfois appliquées pour filtrer ces champs, mais celles-ci ont les défauts qu'on vient de voir. Yano et al. (2004a) proposent d'utiliser le seuillage des coefficients d'ondelettes pour compresser les données météorologiques. Cependant, le choix du seuil est déterminé *a priori* et n'est pas basé sur une méthode objective comme le seuillage itératif. Ainsi, le seuillage itératif en ondelettes peut être utilisé comme un outil général de filtrage et de compression de données pour le post-traitement des sorties des modèles météorologiques.

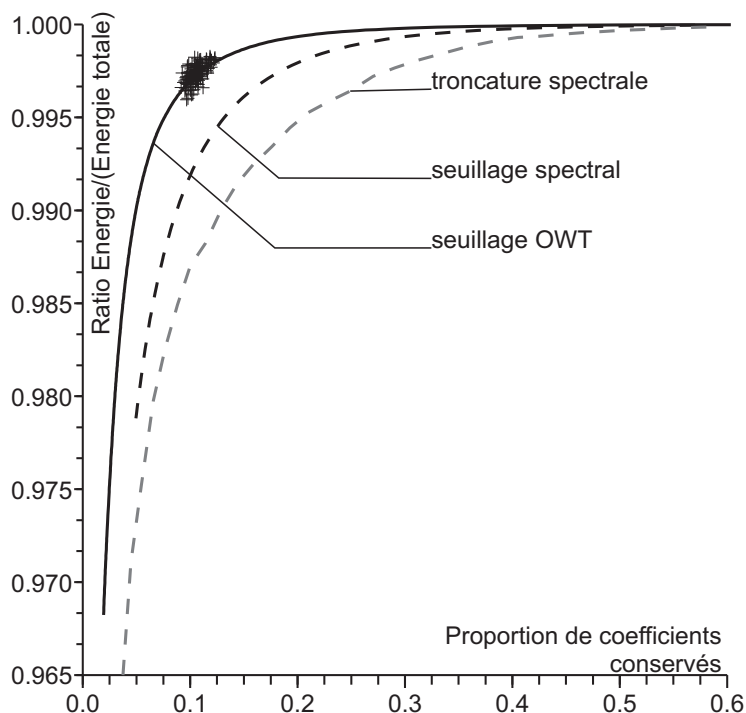


FIG. 2.18: Proportion d'énergie conservée (ordonnée) en fonction du taux de compression (proportion de coefficients conservés, abscisse), pour trois méthodes de compression du signal : le seuillage des coefficients d'ondelettes (trait noir plein), le seuillage des coefficients spectraux (trait noir pointillé) et un filtre basse-fréquence sur les coefficients spectraux. L'ensemble des points obtenus par seuillage itératif en ondelettes pour les 128 instants étudiés est représenté par des croix.

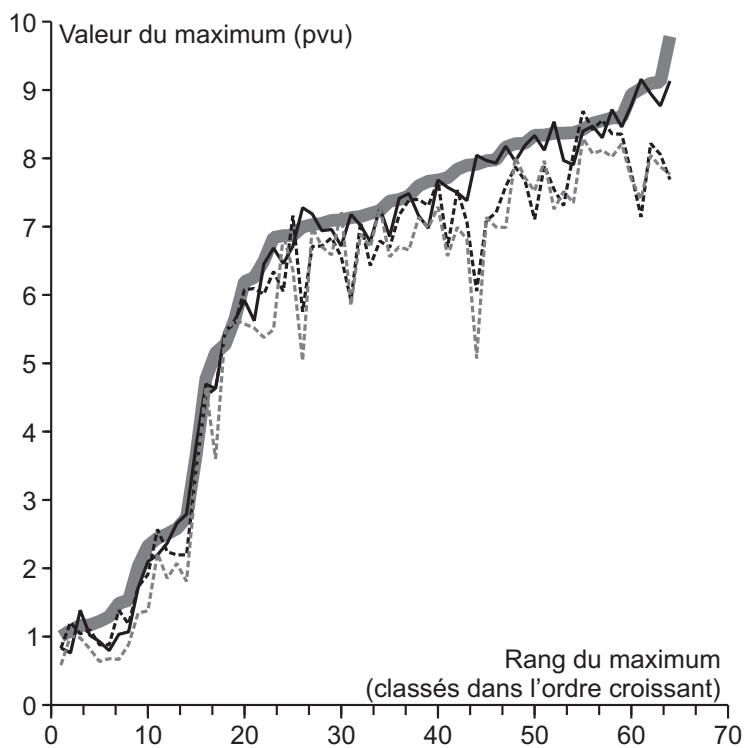


FIG. 2.19: Valeur des maxima locaux (classés par ordre croissant) reconstruits par les trois mêmes méthodes que sur la Fig. 2.18 (même signalisation des courbes, et les valeurs du champ original est marquée par la courbe gris épaisse), pour le même taux de compression que le seuillage itératif OWT 10,5%.

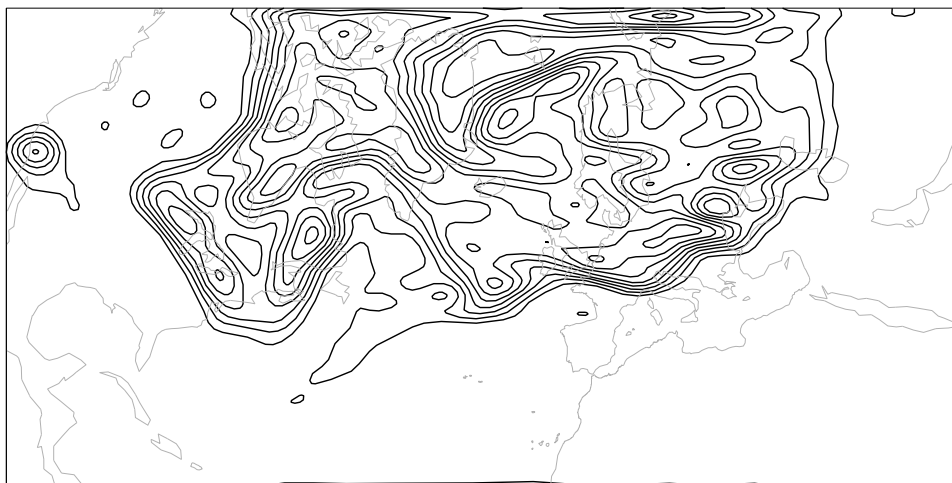


FIG. 2.20: Champ reconstruit par le filtrage basse-fréquence pour le même taux de compression 10,5% que le seuillage itératif OWT. Même légende que la Fig. 2.11.

2.2 Un algorithme d'extraction des structures cohérentes

L'intérêt du seuillage des coefficients d'ondelettes en tant que filtrage vient d'être démontré par plusieurs représentations de champs de tourbillon potentiel en ondelettes. Ce seuillage permet aussi de compresser le champ initial afin de réduire le nombre de coefficients représentant le signal pertinent d'où on extrait les structures cohérentes. Cette extraction individuelle des structures cohérentes est le véritable objectif original à accomplir, ce qui a été entrepris en turbulence mais assez vite abandonné (Farge et Philipovitch, 1993).

La transformée en ondelettes donne un ensemble de fonctions dont la définition locale et spectrale est précise. L'hypothèse de base est qu'une structure cohérente se projette de façon optimale sur un ensemble limité de ces ondelettes. Ainsi, en choisissant les ondelettes adéquates, il devrait être possible d'obtenir une description en ondelettes de la structure, description qui sera locale et spectralement limitée.

Comme précédemment, le choix de la transformée en ondelettes est crucial. La Coiflet 4 sera principalement implémentée pour les raisons citées dans la section 2.1.1 et pour sa bonne localisation spatiale. En outre, l'invariance par translation est nécessaire pour reconstruire de façon optimale chaque structure, ce qui oblige à utiliser la SWT. Il faut ensuite choisir le nombre de dimensions où appliquer la transformée. La reconnaissance des structures nécessite d'interpréter chaque type directionnel des ondelettes. Or, il en existe 3 à 2 dimensions (horizontal, diagonal, vertical), 7 à 3 dimensions, et 15 à 4 dimensions, ce qui fait que dépasser 2 dimensions est difficile. De plus, la discrétisation du champ tridimensionnel en un ensemble de plans horizontaux est acceptée aux échelles considérées, où l'hypothèse hydrostatique est valide (voir plus haut). Au vu de toutes ces contraintes, le choix se porte sur la SWT à deux dimensions de la Coiflet 4, et les bases orthogonales associées. Parfois, pour valider de ce choix, d'autres transformées pourront être testées.

Le cadre d'étude est similaire à celui énoncé dans la section 2.1.3, à l'exception de l'algorithme d'interpolation pour la projection des champs. Pour projeter les champs sphériques sur le domaine plan, les interpolations sphériques, trop coûteuses, ne seront pas mises en œuvre. Néanmoins, afin de limiter le bruit créé par les interpolations, les interpolations cubiques fournies par les routines FullPos dans l'environnement ARPÈGE seront utilisées. Celles-ci sont de bien meilleure qualité que les interpolations bilinéaires. En outre, il s'agit d'un passage direct de la grille de Gauss (grille de collocation sur la sphère) au domaine plan, sans intermédiaire tel qu'une grille régulière latitude/longitude.

La méthode d'extraction présentée ici est davantage justifiée et développée que dans l'article joint (Chap. 4).

2.2.1 Signature en ondelettes d'un monopole

Afin de dégager des idées générales de la représentation des structures cohérentes en ondelettes, une étude idéalisée sur des monopoles est proposée.

Cas d'un monopole unidimensionnel

Pour commencer, il est utile de revenir à des fonctions à une dimension. Une fonction monopolaire Gaussienne est projetée sur l'ensemble des ondelettes SWT d'une transformée jusqu'à l'échelle 5. Chaque ondelette est définie par la position de son maximum u et par son échelle j . Le résultat est présenté dans l'espace (u, j) (Fig. 2.21, même mode de représentation que la Fig. 2.6), ce qui permet de dégager quelques propriétés de la représentation en ondelettes du monopole.

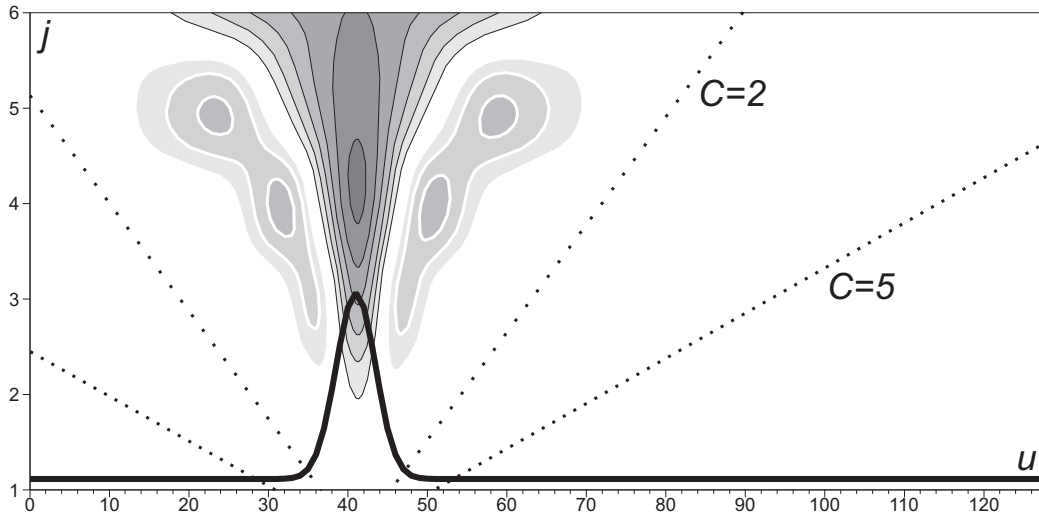


FIG. 2.21: Projection dans l'espace des coefficients d'ondelettes SWT (plages de gris, contours noirs : valeurs positives, contours blancs : valeurs négatives) de la fonction monopolaire tracée en trait épais, pour la Coiflet à 4 moments nuls. L'espace des coefficients d'ondelettes a pour abscisse la coordonnée du domaine initial, et en ordonnée l'échelle des coefficients d'ondelettes. Deux cônes d'influence associés au point maximal de la Gaussienne (le cône complet de pente $C = 5$ et un restreint $C = 2$) sont délimités par des traits pointillés. L'échelle 6 représente ici, par abus de langage, l'approximation résiduelle d'échelle 5 de la transformée en ondelettes.

Le point maximal (*pic*) de la fonction est associé à une ligne de maximum dans l'espace ondelette à toutes les échelles. De plus, le long de cette ligne, on repère une échelle particulière où la valeur des coefficients d'ondelettes est maximale ; il s'agit de l'échelle 4. L'ondelette d'échelle 4 centrée sur le pic de la fonction originale est donc celui où la fonction se projette le mieux. On l'appellera *coefficient principal* de la structure.

Contrairement au monopole, la projection du tripole (Fig. 2.22) a des coefficients de grande échelle (5 et 6) d'amplitude faible, ce qui caractérise d'autant mieux l'existence du coefficient principal. La raison en est que la partie moyenne du signal se projette uniquement sur la dernière partie basse-fréquence de la transformée, soit ici les coefficients d'approximation (échelle 6 de la représentation). Cette observation est liée au fait qu'une fonction reconstruite par une somme d'ondelettes aura nécessairement une moyenne nulle.

L'ondelette de Meyer (Fig. 2.23) et la Coiflet donnent des représentations semblables, à la différence que la projection sur l'ondelette de Meyer est plus étalée dans l'espace. Par exemple,

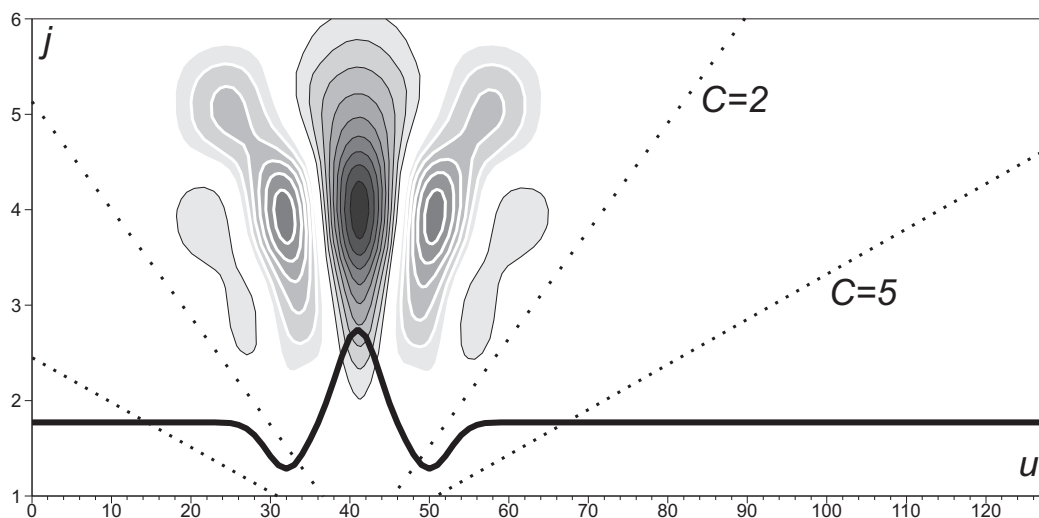


FIG. 2.22: Même légende que la Fig. 2.21 pour une fonction tripolaire, somme de trois Gaussiennes, une positive et ses deux voisines négatives.

le coefficient principal a une valeur 15% moindre et il apparaît des isolignes positives à assez longue distance. La meilleure compacité de la Coiflet à 4 moments nuls en comparaison de l'ondelette de Meyer est une justification supplémentaire pour son utilisation.

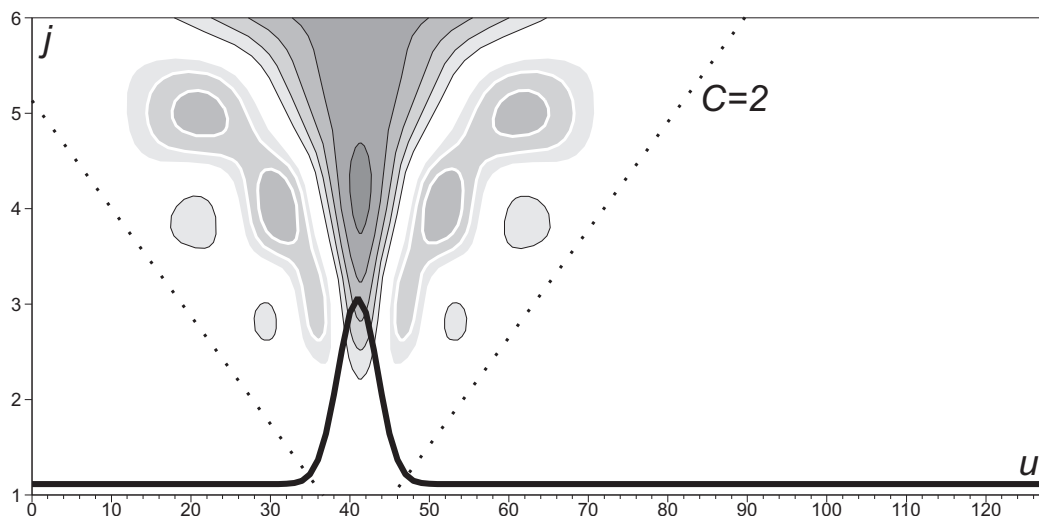


FIG. 2.23: Même légende que la Fig. 2.21 en utilisant l'ondelette de Meyer. Le cône complet, de taille infinie, n'est pas montré.

Le principe de la reconstruction de la structure par les ondelettes est de choisir un ensemble limité d'ondelettes orthogonales, donc appartenant à une même base OWT, sur lesquels la structure se projette au mieux. Il faut donc optimiser un critère de compacité, qui consiste à représenter la norme maximale de la structure par un nombre minimal d'ondelettes. Ainsi, il est proposé de prendre comme base OWT une base qui contient le coefficient principal de la structure car celui-

ci a la valeur maximale. Il s'agit donc sur le présent exemple d'une base OWT qui a une ondelette d'échelle 4 au point du maximum de la structure.

Sur la Fig. 2.24, on voit qu'il existe plusieurs bases qui possèdent ce coefficient ; elles ne diffèrent que par la position des ondelettes d'échelle supérieure à celle du coefficient principal. Or, comme ces ondelettes d'échelle supérieure sont décalés par rapport à la position du pic de la structure, leur coefficient est faible, ce qui signifie qu'on peut les négliger pour la reconstruction de la structure. On considère donc qu'il existe une échelle maximale de reconstruction, qui est l'échelle du coefficient principal. Les échelles supérieures constituent plutôt l'environnement de grande échelle de la structure. Comme les coefficients d'échelle supérieure à celle du coefficient principal ne sont pas liés à la structure, on peut donc choisir n'importe quelle base OWT qui contient le coefficient principal.

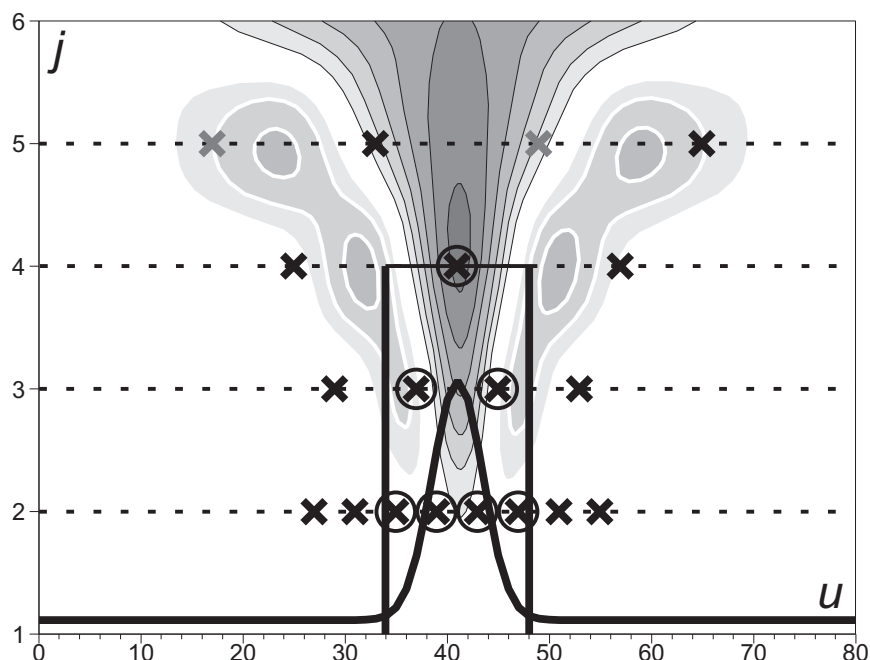


FIG. 2.24: Position des ondelettes (croix) des bases OWT qui comprennent un coefficient d'échelle 4 localisé au pic de la structure. À l'échelle 5, deux bases sont possibles (croix noires ou grises). Les coefficients du cylindre d'influence partant du coefficient principal sont entourés. À l'échelle 1, aucune ondelette n'est positionnée pour la lisibilité de la figure.

Dans la base d'ondelettes orthogonales choisie, plusieurs méthodes de sélection des coefficients sont possibles. Yano et al. (2004b) proposent de construire un amas de coefficients d'amplitude importante dans l'espace position-échelle. Cette méthode permet d'extraire des structures à une dimension, cependant son extension à deux dimensions pose problème, comme nous le verrons plus loin.

Les autres techniques sont plutôt basées sur les propriétés de la représentation en ondelettes. À un point du domaine est associé le *cône d'influence* (Mallat, 1998) qui est l'ensemble des

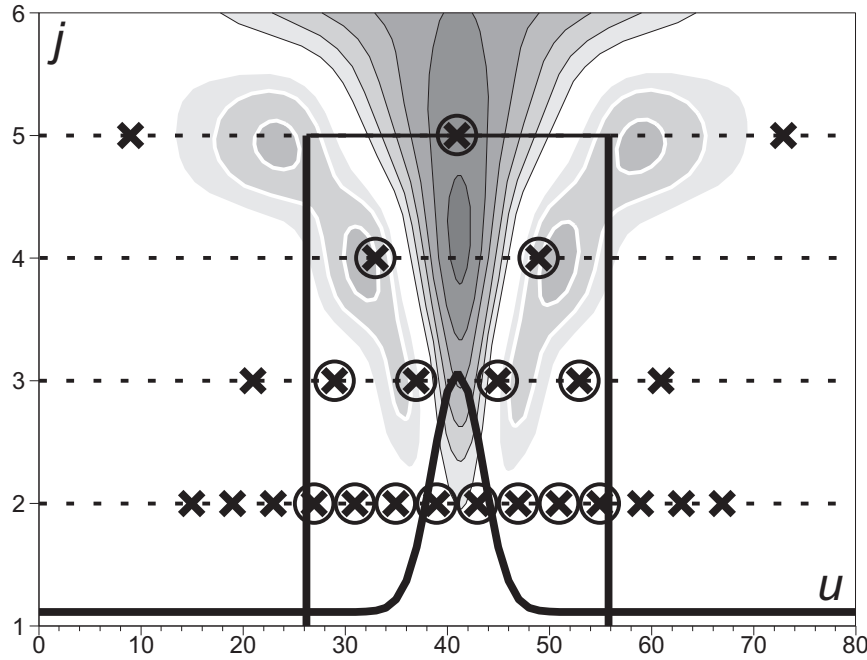


FIG. 2.25: Position des ondelettes de la base OWT qui comprend un coefficient d'échelle 5 localisé au pic de la structure. Les coefficients du cylindre d'influence partant du coefficient d'échelle 5 ont entourés. À l'échelle 1, aucune ondelette n'est positionnée pour la lisibilité de la figure.

coefficients d'ondelettes affectés par ce point. Si le support de l'ondelette est $[-C, C]$, le cône d'influence associé au point p est l'ensemble des ondelettes $\psi_{j,u}$ tels que :

$$|u - p| \leq C.2^j$$

Pour la Coiflet à 4 moments nuls, le cône ($C = 5$) est représenté sur la Fig. 2.21. On s'aperçoit qu'il est de très grande taille : à l'échelle 4, il couvre déjà la totalité des 128 coefficients, ce qui le rend inadapté à la reconstruction locale d'une structure. Pour l'ondelette de Meyer (Fig. 2.23), qui est à support non compact, le cône est de taille infinie. Afin de conserver les ondelettes assez proches de la structure, on peut définir un cône d'influence réduit qui se concentre sur les coefficients centraux du cône, par exemple en choisissant $C = 2$. Farge et al. (1999) citent un tel travail entrepris sur le cône d'influence (Farge et Philipovitch, 1993).

Cependant, il semble que le principe du cône ne soit pas vraiment adapté au problème posé. En effet, le cône permet la reconstruction associée à un point de grille. Or, on ne s'intéresse pas à un point, mais à une structure, qui a une extension spatiale finie. La taille de la structure est déterminée par son coefficient principal. Par conséquent, il semble plus pertinent de définir un cylindre d'influence d'échelle J comme étant l'ensemble des ondelettes $\psi_{j,u}$ tels que :

$$j \leq J, \quad |u - p| \leq K.2^J$$

où K est un facteur caractéristique. Le cylindre d'influence pour $K = 1$ associé au coefficient principal d'échelle 4 apparaît sur la Fig. 2.24. Celui associé au coefficient d'échelle 5 apparaît

sur la Fig. 2.25. Celui-ci génère un étalement dans l'espace beaucoup plus important, alors que la norme préservée dans la structure n'est pas plus importante. Ceci confirme le choix de la base OWT par le coefficient principal plutôt que par un coefficient d'échelle supérieure.

Pour le cas présent, où les coefficients de la structure sont concentrés dans les échelles 4 et 3, l'intérêt du cylindre par rapport au cône n'apparaîtra pas de façon aussi évidente sur l'exemple du monopole Gaussien que pour des structures plus complexes. Cependant, il semble clair que le cylindre permet de corriger la structure sur toute son étendue et non seulement au voisinage de son maximum. La Fig. 2.26 l'illustre mais cela se verra encore mieux sur des cas réels de structures bidimensionnelles (section 2.2.2). La reconstruction par le cylindre permet d'obtenir une structure qui perd en partie la mémoire de l'ondelette utilisée. Le cône reconstruit correctement le maximum local au détriment de l'étendue de la structure. Ce résultat est cohérent avec la définition du cône et du cylindre : le cône est associé au pic de la structure, le cylindre est davantage lié à son étendue spatiale, donnée par le coefficient principal de la structure. De plus, le cylindre d'influence a l'avantage de ne pas contenir de coefficients éloignés du pic de la structure aux échelles supérieures à l'échelle maximale, ce qui limite les problèmes d'interférences avec les éventuelles structures voisines.

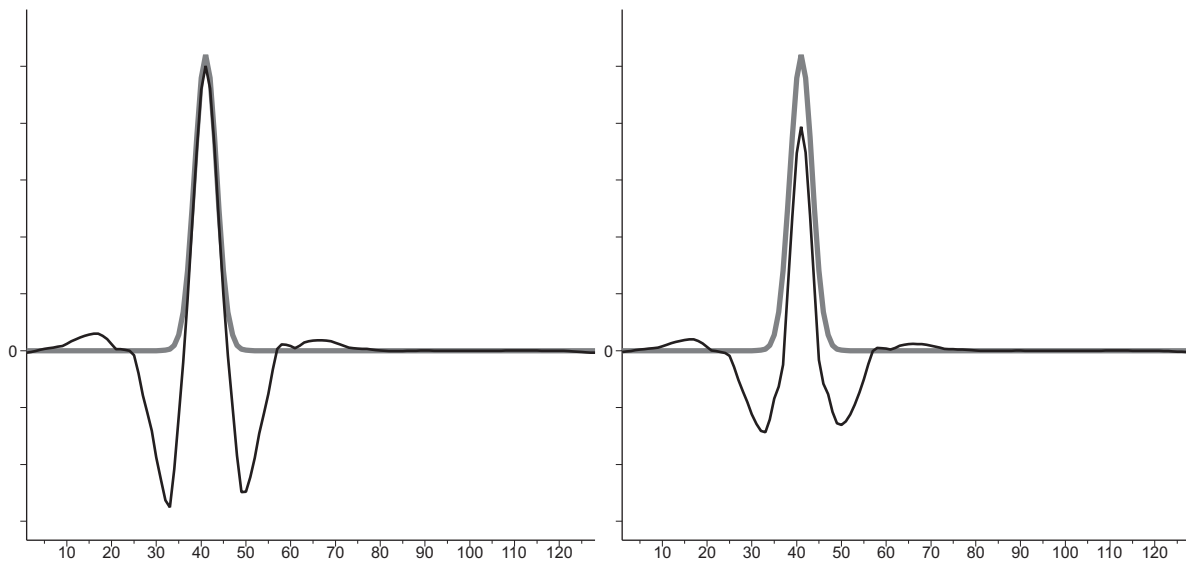


FIG. 2.26: Reconstruction (trait noirs) du monopole Gaussien (trait gris) par le cône d'influence de pente $C = 2$ jusqu'à l'échelle 4 (à gauche) et le cylindre d'influence d'échelle 4 (à droite). Contrairement au monopole initial, les deux structures reconstruites ont une moyenne nulle, ce qui est inévitable par construction.

On a ainsi bâti un principe de détection et de construction d'une structure par les ondelettes, dans le cas de signaux à une dimension. Il reste à l'étendre à deux dimensions, puis aux cas réels.

Cas d'un monopole bidimensionnel

Le passage à deux dimensions rend plus complexe l'analyse des coefficients d'ondelettes en raison de l'existence des trois types de coefficients horizontaux, verticaux et diagonaux. Les

ondelettes horizontales et verticales sont fortement anisotropes, alors que les ondelettes diagonales sont quasiment isotropes. De plus, les ondelettes diagonales ont une position centrale au sein d'une même base OWT (Fig. 2.27). Ainsi, on pressent que les coefficients diagonaux devront jouer un rôle particulier dans la détection et la représentation des structures par rapport aux autres coefficients.

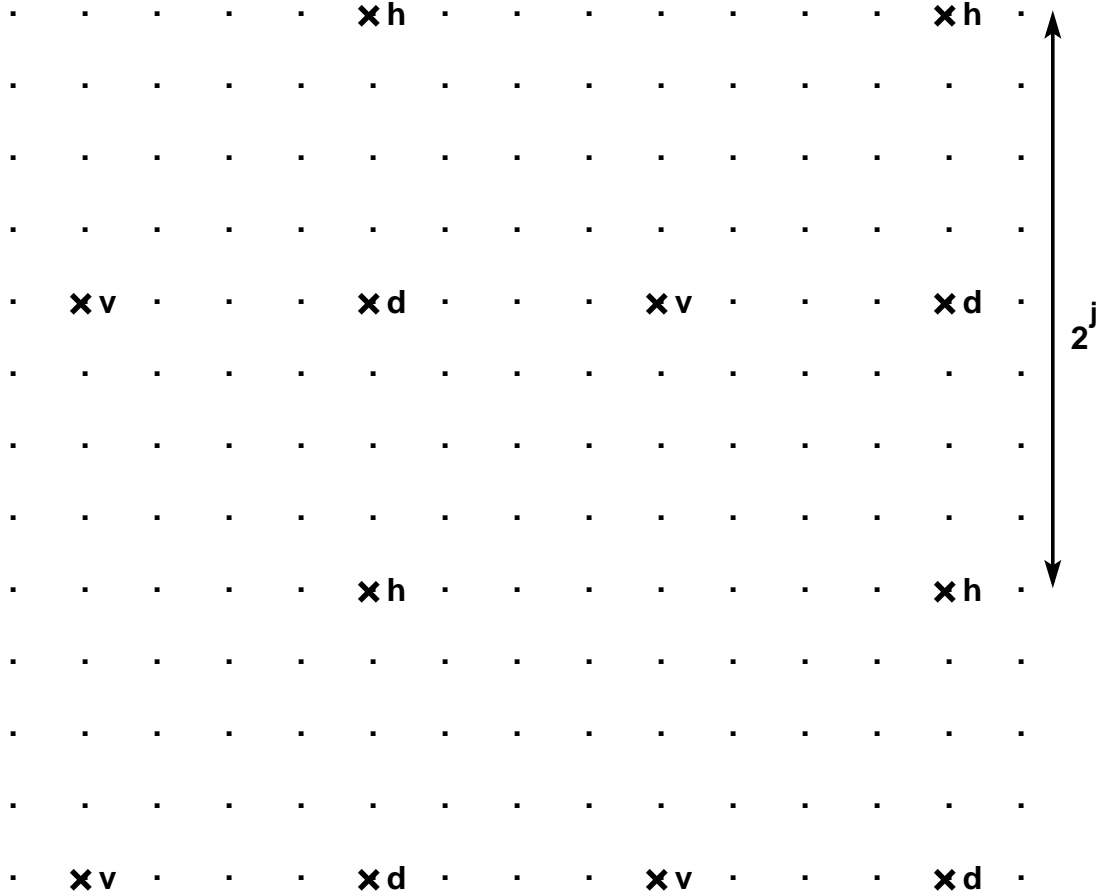


FIG. 2.27: Position dans l'espace physique des points de grille (représentés par des points) des pics des ondelettes à l'échelle j d'une même base OWT. Les pics des ondelettes diagonales (d), horizontales (h) et verticales (v) sont disposés de la façon régulière montrée sur cette figure. Les ondelettes diagonales sont centrales, dans le sens où ils sont entourés de près par deux ondelettes horizontales (au-dessus et en dessous) et deux ondelettes verticales (à gauche et à droite).

L'équivalence à deux dimensions des graphes (u, j) dans le cas unidimensionnel est un parallélépipède (x, y, d_j) , similaire à la représentation SWT de la Fig. 2.9. d_j désigne à la fois la direction d et l'échelle j des coefficients. Pour voir les valeurs des coefficients d'ondelettes, il est donc pertinent de tracer des cartes de coefficients d'ondelettes (x, y) , par échelle et par direction. Sur une telle carte d'échelle j et de direction d , la valeur au point (x, y) est le coefficient d'ondelette d'échelle j et de direction d dont le pic est situé au point (x, y) .

La projection d'un monopole circulaire sur ce type de représentation (Fig. 2.28) montre un

comportement analogue au cas unidimensionnel. Pour une échelle et une direction données, la valeur des coefficients atteint un maximum au pic du monopole, et ceci à toutes les échelles et directions. De plus, comme dans le cas unidimensionnel, on s'aperçoit que la valeur de ce maximum est maximale à l'échelle 4, et ce pour toutes les directions. L'examen de la projection sur les mêmes ondelettes d'une structure elliptique de rapport d'aspect 2 (Fig. 2.29), et de celle-ci pivotée d'un angle 45° (Fig. 2.30) montre le comportement différencié des coefficients d'ondelettes selon leur direction. Pour être correctement reconstruite, l'ellipse doit l'être à l'échelle 4, car une de ses dimensions est d'échelle 4. Ceci est confirmé par la Fig. 2.31 qui montre la reconstruction des deux ellipses à l'échelle 3 par le cylindre d'influence : cette reconstruction est défailante. Or, on s'aperçoit que la valeur des coefficients verticaux et horizontaux au pic de la structure (Figs. 2.29 et 2.30) sont très sensibles à sa rotation. La valeur des coefficients diagonaux au pic de la structure, au contraire, l'est peu. On en déduit que la détermination de l'échelle maximale de la structure doit se faire préférablement par les coefficients diagonaux.

La reconstruction de ces structures montre que le cône d'influence est défailant pour la reconstruction des ellipses : il ne permet pas de reproduire correctement les variations de petite échelle de la structure, comme par exemple les arrondis de l'ellipse à ces extrémités (Fig. 2.29), ni même sa forme générale et sa régularité (Fig. 2.30). L'erreur normalisée de reconstruction des structures par les deux méthodes (tableau 2.1) confirme ce résultat. Cette erreur de la structure reconstruite \tilde{s} par rapport à la structure initiale s s'écrit $(\|s - \tilde{s}\|/\|s\|)^2$.

Deux expériences complémentaires sont menées, où la structure circulaire de la Fig. 2.28 est placée dans un gradient de grande échelle (Fig. 2.32) ou au voisinage d'une structure d'échelle supérieure (Fig. 2.33). Le but est de voir si les idées présentées ci-dessus sont robustes dans le cas où la structure n'est pas isolée. Le principe de détection de l'échelle par la valeur maximale dans les cartes de coefficients diagonaux demeure valide. Dans le cas de deux structures (Fig. 2.33), il y a bien un maximum dans les coefficients d'échelle 4, mais il est légèrement décalé par rapport au pic de la structure (d'un point de grille en x et en y). Il faudra donc accorder un peu de tolérance dans la distance entre les pics. La reconstruction par le cylindre d'influence fonctionne correctement dans le cas de la Fig. 2.32 : la décomposition en échelle de la transformée en ondelettes permet de correctement séparer la structure d'un gradient de grande échelle. Cette configuration est représentative d'une structure cohérente plongée dans son environnement de grande échelle, comme un courant-jet par exemple. Dans le cas de la Fig. 2.33, le cylindre d'influence reconstruit de façon satisfaisante la structure, mais en augmentant l'amplitude de la structure (voir aussi le Tab. 2.1). La structure d'échelle 4 emprunte une partie de sa voisine d'échelle 5 ; la séparation n'est donc pas parfaite. On est ici dans un cas extrême de proximité des deux structures ; ce problème s'amenuise à mesure que la distance entre les structures augmente. Néanmoins, ce défaut pourrait être réglé par les futurs développement de l'algorithme qui prendrait en compte une approche temporelle couplée à l'orthogonalisation des structures (voir 2.3).

Le critère de maximalité dans les cartes de coefficients par échelle montre l'importance d'utiliser la transformée SWT plutôt que la OWT (voir aussi l'article joint dans le Chap. 4). En effet, pour la OWT il n'y a pas d'ondelette en tout point de grille à chaque échelle. Les résultats seraient alors biaisés par le choix arbitraire de la translation de la base.

Le Tab. 2.1 montre que le cylindre fait toujours mieux ou aussi bien que le cône.

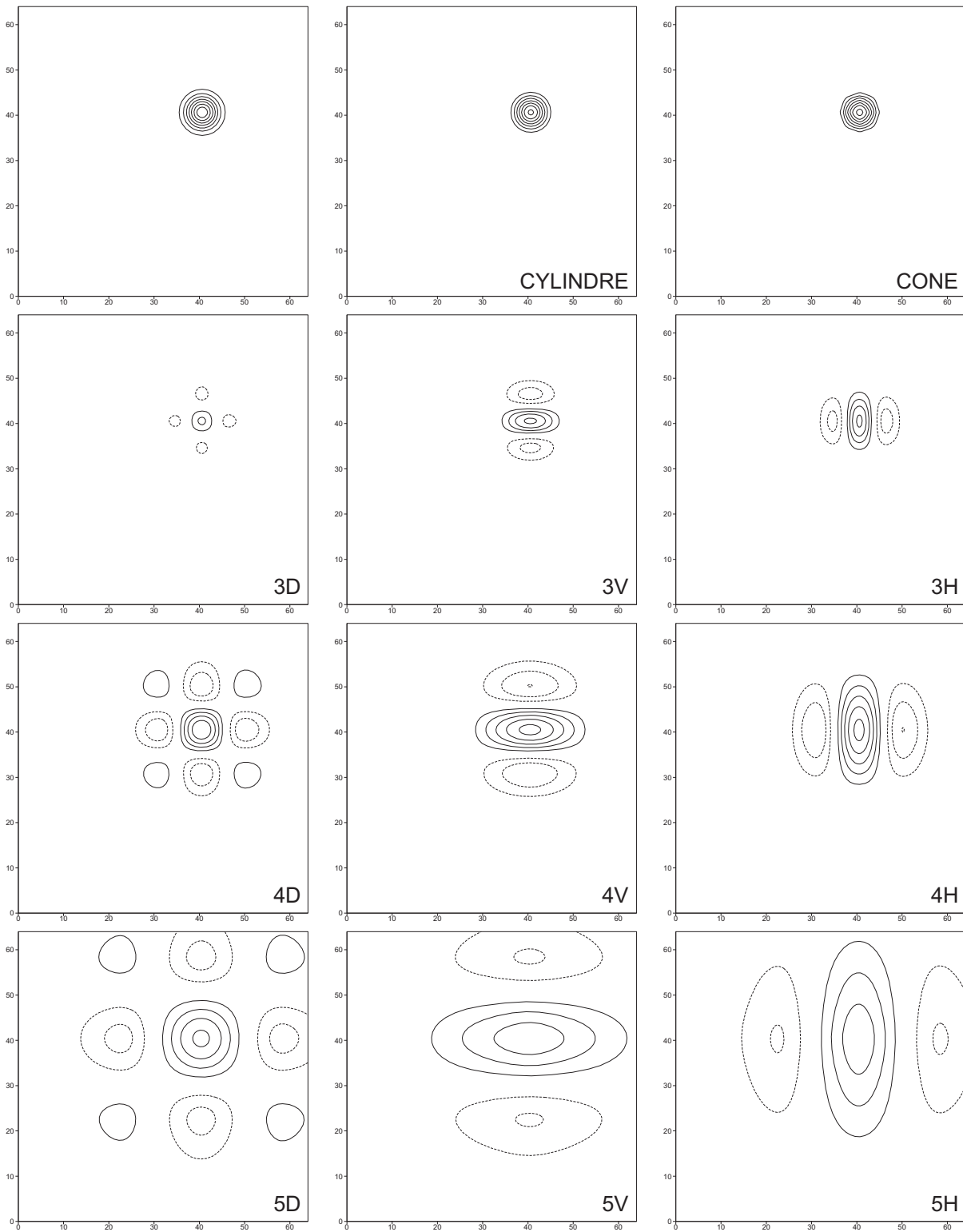


FIG. 2.28: Projection dans l'espace des ondelettes d'un monopole circulaire (en haut à gauche) de profil Gaussien identique à la Fig. 2.21. La reconstruction par le cylindre et par le cône sont représentés en haut, respectivement au milieu et à droite. Sont représentés les coefficients d'échelle 3, 4 et 5 (de haut en bas), de direction diagonale, verticale et horizontale (de gauche à droite).

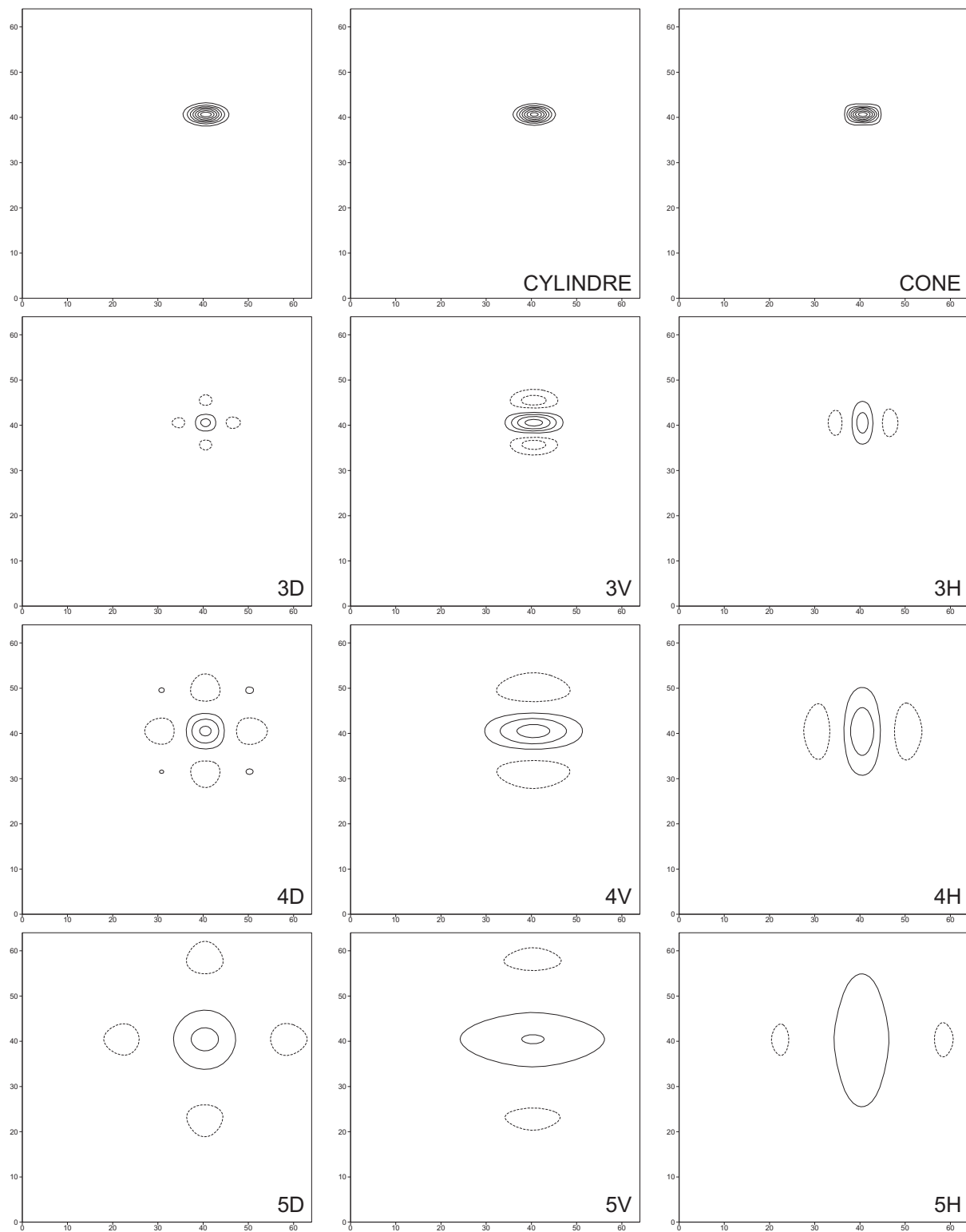


FIG. 2.29: Figure identique à la Fig. 2.28, pour une ellipse de grand axe identique au profil Gaussien de la Fig. 2.21 et de petit axe moitié de celui-ci.

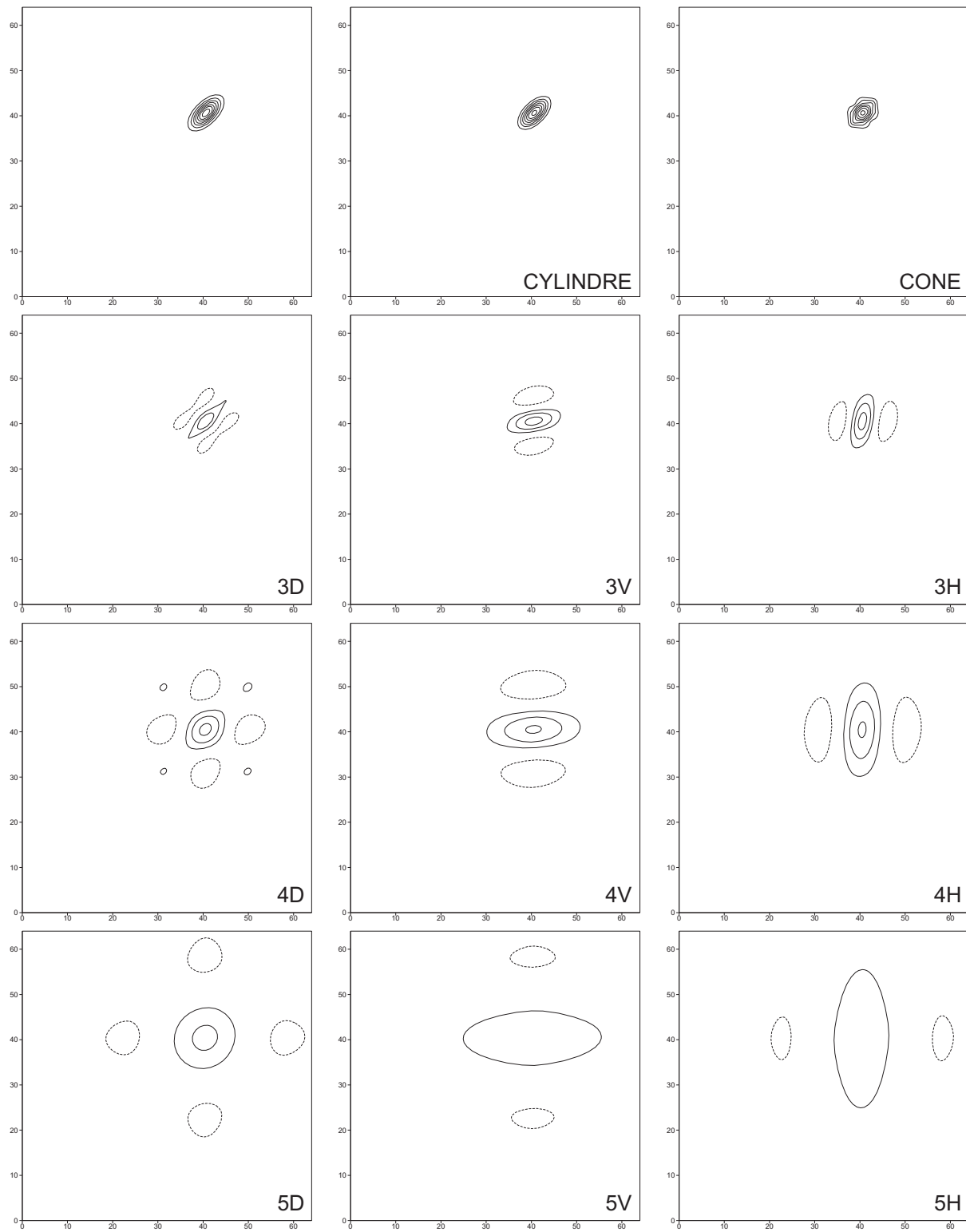


FIG. 2.30: Figure identique à la Fig. 2.28 pour la même ellipse que la Fig. 2.29, mais inclinée de 45 degrés.

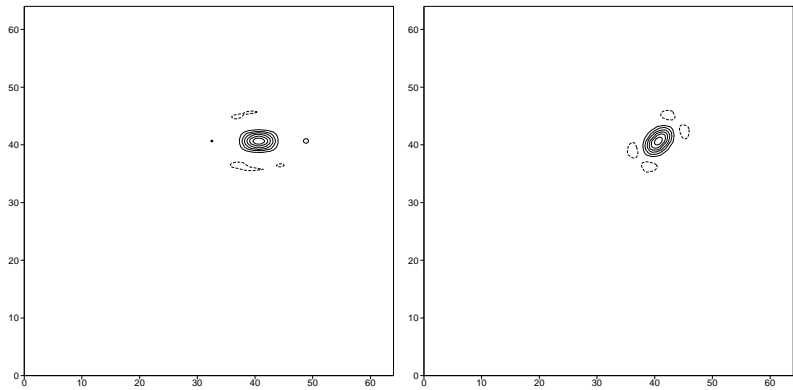


FIG. 2.31: Reconstruction à l'échelle 3 de l'ellipse de la Fig. 2.29 (à gauche), et de l'ellipse de la Fig. 2.30, par le cylindre d'influence.

structure	cercle	ellipse 0 °	ellipse 45 °	cercle dans un gradient	cercle dans un grand cercle
n ° Figure	(2.28)	(2.29)	(2.30)	(2.32)	(2.33)
cylindre	0,16	0,08	0,09	0,16	0,36
cône	0,17	0,10	0,15	0,17	0,36

TAB. 2.1: Erreur de reconstruction des structures bidimensionnelles représentées sur les figures indiquées, par le cône et le cylindre d'influence.

tel-00286510, version 1 - 9 Jun 2008

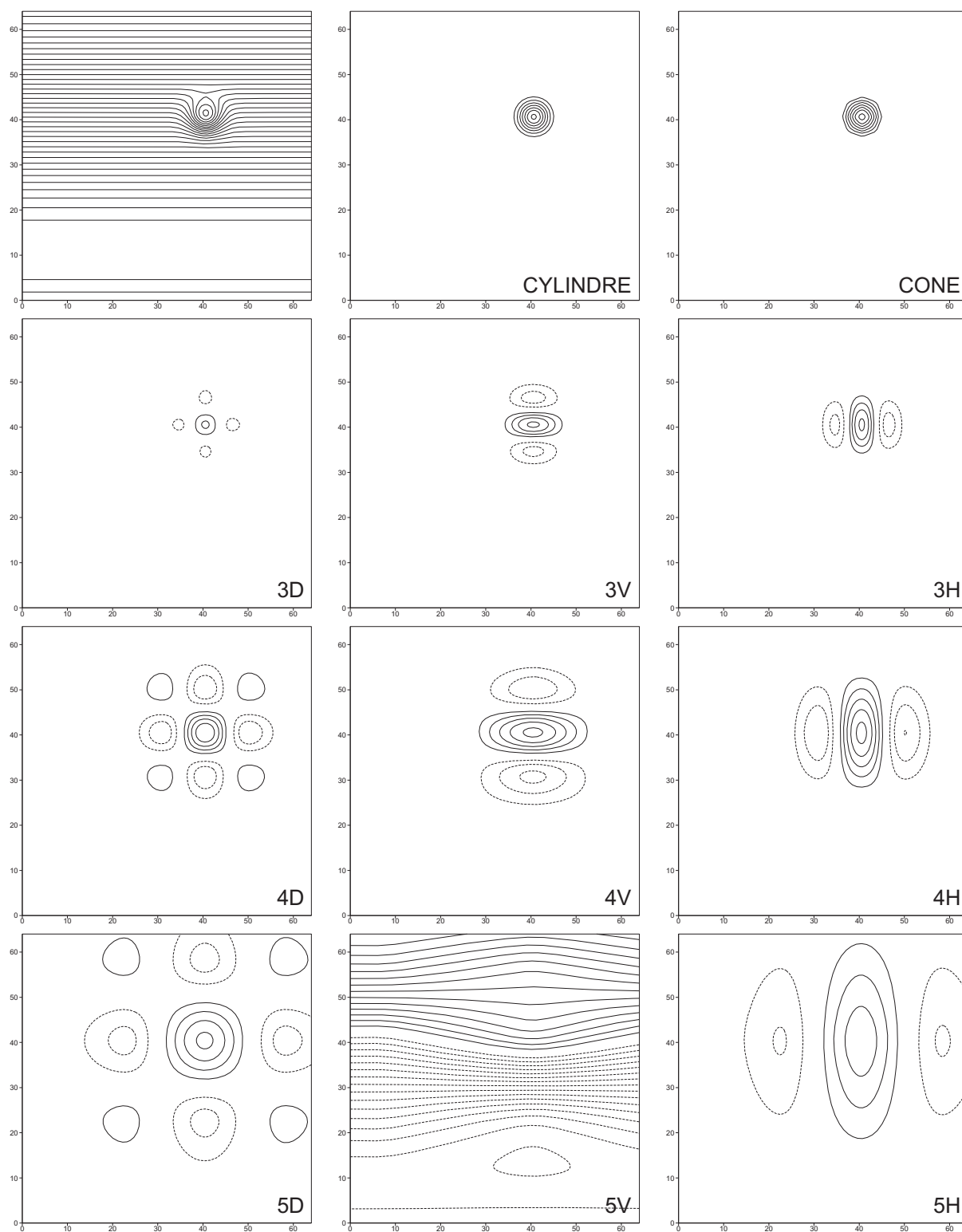


FIG. 2.32: Figure identique à la Fig. 2.28 pour la même structure circulaire placée dans un gradient de grande échelle. Le cylindre et le cône permettent de bien séparer la structure de son environnement.

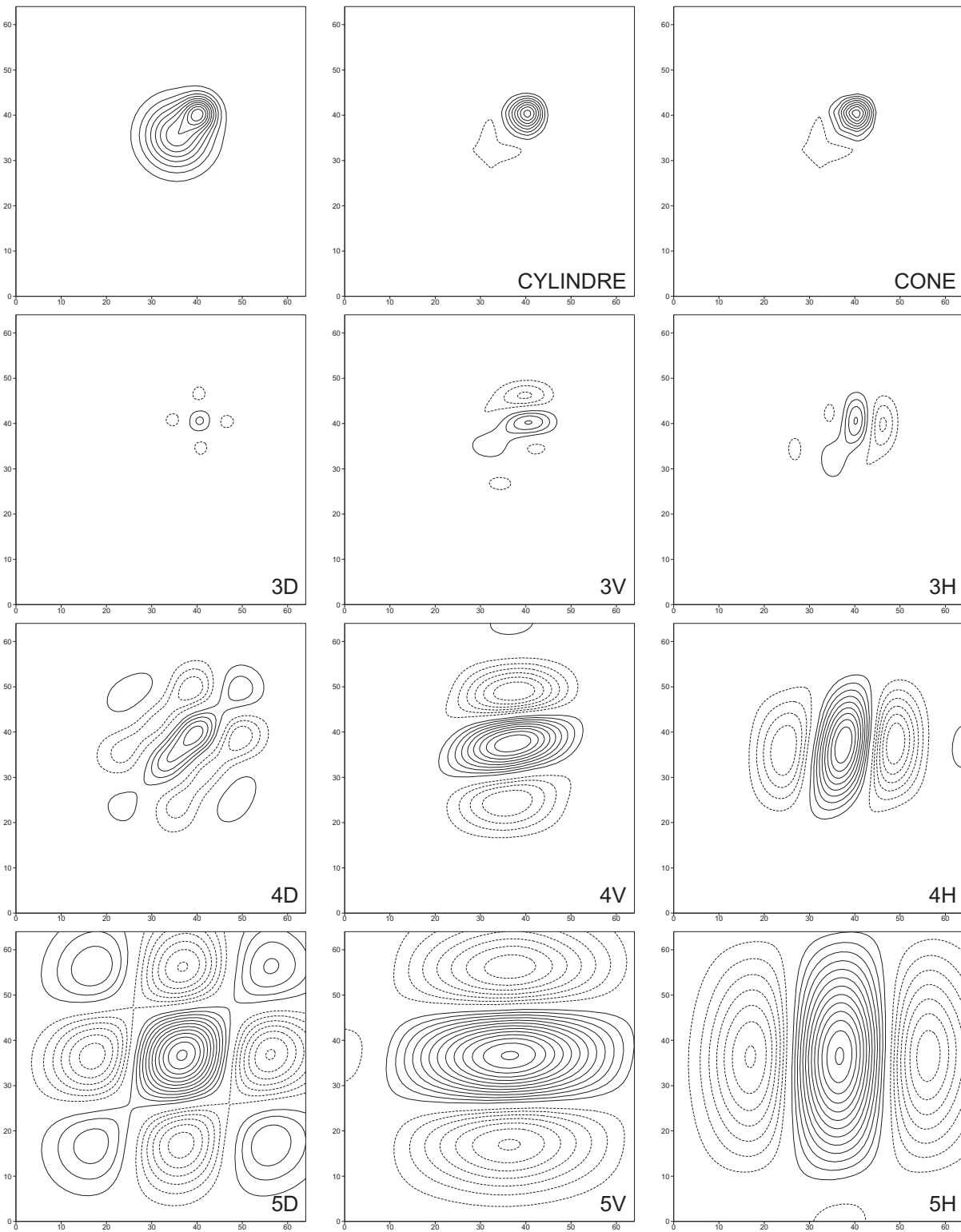


FIG. 2.33: Figure identique à la Fig. 2.28 pour la même structure circulaire placée au voisinage d'une structure de plus grande échelle. On tâche ici de reconstruire la structure circulaire de plus petite échelle. Sa reconstruction est d'amplitude plus forte que la structure initiale.

2.2.2 Construction d'un algorithme d'extraction

À partir de cet ensemble de tests sur des structures idéalisées, on peut détailler un premier algorithme d'extraction des structures cohérentes. Son utilisation dans le cas de l'extraction d'une structure unique est exposé dans l'article joint (Chap. 4). Ici, la présentation de l'extraction de plusieurs structures sera faite. Cet algorithme procède en trois étapes : détection des structures potentielles, détermination de la base adaptée, et sélection des coefficients dans cette base. L'extraction sera illustrée sur un champ de tourbillon potentiel sur un niveau isentrope, issu de la réanalyse ERA40.

Détection des structures potentielles

Une structure cohérente est caractérisée par l'existence d'un pôle central. Si on s'intéresse aux précurseurs des cyclogenèses dans le champ de tourbillon potentiel, ce pôle est positif. Par conséquent, une détection primaire des structures potentielles pourra se faire en détectant les maxima relatifs dans le champ (Fig. 2.34). Un maximum relatif est un point dont la valeur est supérieure à ses 8 points de grille voisins. Pour éviter de s'intéresser à des maxima associés à du bruit, on ajoute une contrainte sur la valeur du maximum, à savoir que sa valeur doit être supérieure à un seuil, de valeur faible, 1 pvu sur le niveau 315 K par exemple. La détermination d'un tel maximum ne permet cependant pas de définir les structures cohérentes de façon univoque : plusieurs maxima locaux peuvent être associés à la même structure. Il s'agit seulement d'être sûr de n'en manquer aucune ; la suite de l'algorithme permettra de déterminer les maxima appartenant à une même structure. On choisit cependant un seuil minimal pour la valeur du maximum afin d'éviter la détection d'un trop grand nombre de maxima locaux dans des régions où le champ est faible.

La détection des maxima relatifs est effectuée sur le champ issu du filtrage non linéaire à partir des coefficients SWT. En effet, celui-ci est moins bruité que le champ original, ce qui permet de limiter le nombre de maxima locaux non significatifs détectés. Chaque maximum local sera appelé *pic* d'une structure.

Détermination de la base d'ondelettes adaptée

La construction de chaque structure se fait dans une base d'ondelettes OWT dont la translation est adaptée. On a vu sur des structures idéalisées le principe de détection de l'échelle de la structure. Avant de passer à un champ réel, il faut d'abord analyser les cartes de coefficients diagonaux, obtenues après filtrage SWT. Ces cartes sont construites de la même façon que celles de la Fig. 2.28. Les coefficients diagonaux aux échelles 3, 4 et 5 sont ainsi montrés sur la Fig. 2.35. Ces cartes prennent la forme de champs réguliers formés de pôles positifs et négatifs.

À partir de l'étude idéalisée, les principes de détection de l'échelle maximale de recombinaison se généralisent à tout champ bidimensionnel : l'échelle de détection est telle qu'il y existe un maximum local dans les coefficients diagonaux, à la fois selon l'échelle et dans la carte des coefficients.

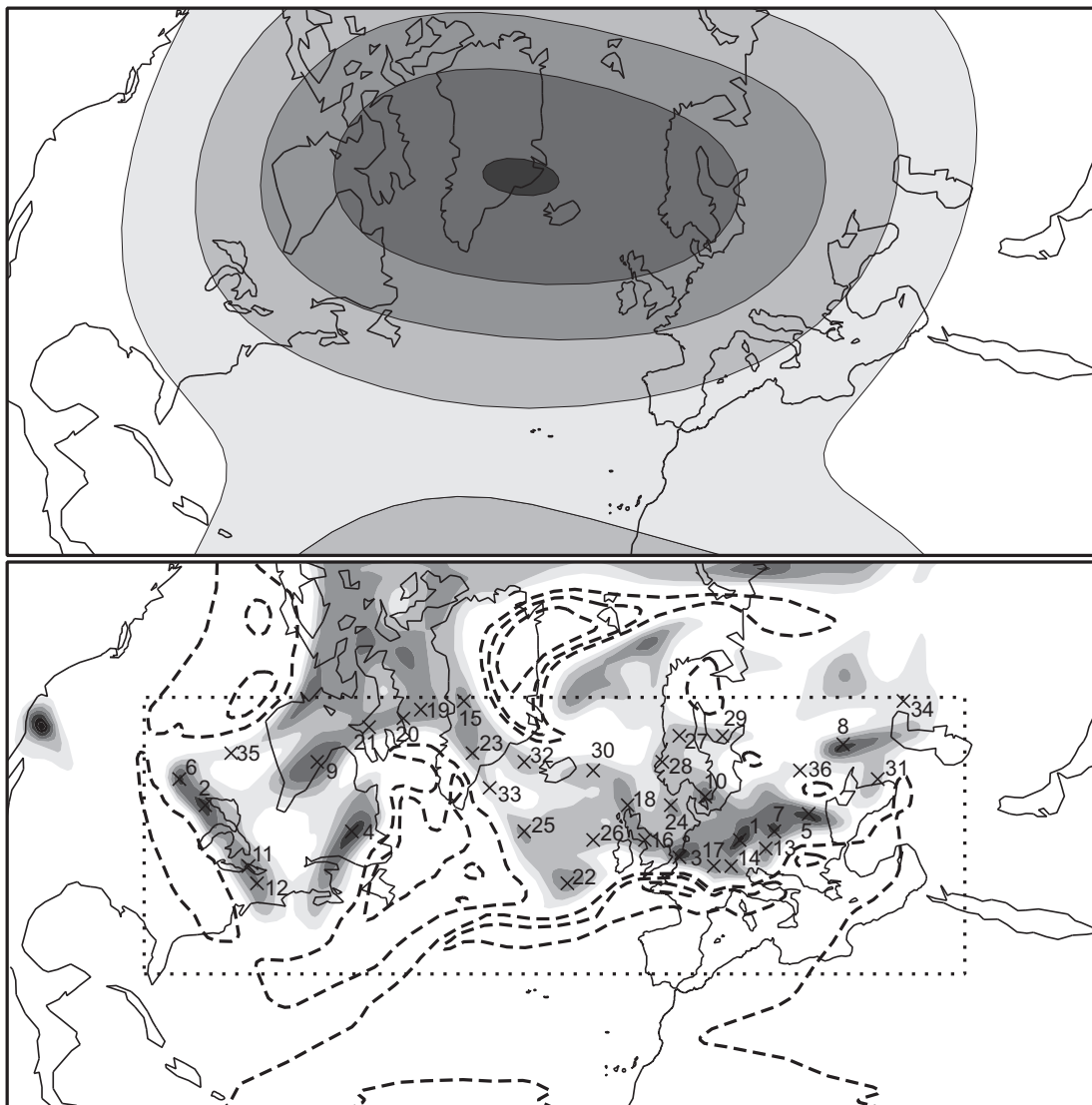


FIG. 2.34: Grande échelle (en haut) et petite échelle (en bas) résultats de la transformée en ondelettes d'échelle 5 après filtrage non linéaire itératif (intervalle 1 pvu, valeurs positives en grisé, valeurs négatives en pointillé). Les structures cohérentes sont recherchées dans un sous-domaine suffisamment loin des bords (rectangle pointé). Les maxima relatifs du champ sont indiqués par une croix, et le numéro associé est le résultat du classement par ordre décroissant des valeurs du maximum.

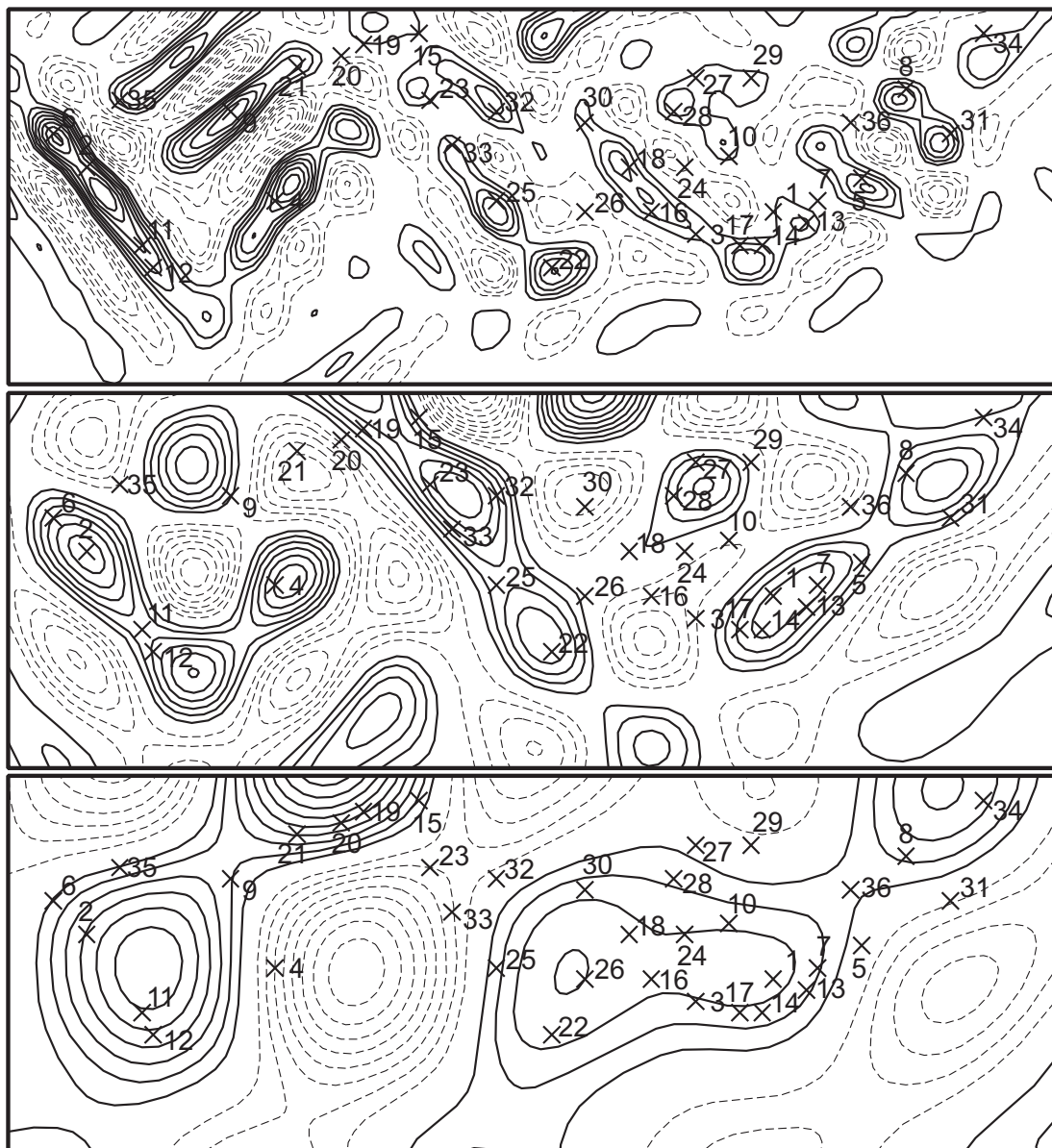


FIG. 2.35: Cartes de coefficients diagonaux de l'échelle 3 (en haut) à 5 (en bas), sur le sous-domaine de détection des structures. Les isolignes positives sont en trait plein et les négatives en trait pointillé. Les positions des maxima détectés initialement (Fig. 2.34) sont marquées. Pour plus de clarté, l'intervalle des isolignes est le double à l'échelle j par rapport à l'échelle $j - 1$.

Dans les champs plus complexes, une certaine tolérance est accordée, qui se caractérise dans l'algorithme décrit ci-après :

- détection des maxima locaux (relatifs) dans les cartes de coefficients diagonaux à toutes les échelles ;
- attribution des monopoles associés à chaque structure : un monopole est attribué au pic de la structure le plus proche et seulement à lui, et à condition qu'il soit suffisamment proche (la distance tolérée peut dépendre de l'échelle) ;
- l'échelle de la structure est l'échelle maximale pour laquelle un monopole lui est attribuée, et telle que la valeur du coefficient d'ondelette au point du pic à cette échelle soit supérieur à la valeur au même point à l'échelle inférieure.

Ces règles permettent de déduire les échelles de reconstruction (Fig. 2.36) des structures détectées. Quand aucun monopole n'est attribué à une structure, souvent parce que les monopoles proches ont été attribués à une autre structure, alors la structure est considérée comme nulle. Le pic détecté initialement ne correspond alors pas à une structure ; il est donc abandonné.

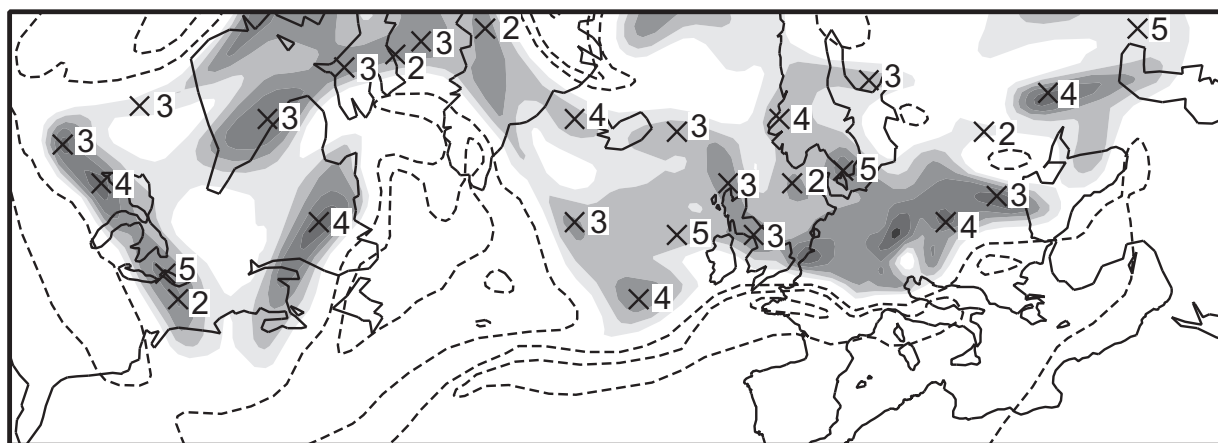


FIG. 2.36: Échelle attribuée aux structures cohérentes initialement détectées. Depuis la Fig. 2.34, certaines ont disparu car aucune échelle ne leur a été attribuée pour les raisons expliquées dans le texte.

Sélection des coefficients d'ondelettes dans cette base

Comme vu précédemment, la construction des structures se fait par le cylindre d'influence. La construction de la structure n° 22 est montrée dans l'article joint (Chap. 4), où on voit l'intérêt des coefficients de petite échelle pour construire correctement la structure, et donc l'utilité du cylindre d'influence.

Une structure reconstruite est conservée si la valeur au pic est supérieure à la valeur du seuil de détection (donc 1 pvu sur ce champ) et si sa norme est non négligeable. Ainsi, on aboutit à 23 structures (Fig. 2.37), classées par ordre décroissant de la valeur au pic (Fig. 2.38).

Ces résultats permettent de discuter les détails et la validité de l'algorithme. Comme stipulé dès la mise en place de l'algorithme, la plupart des structures se caractérise par un pôle central

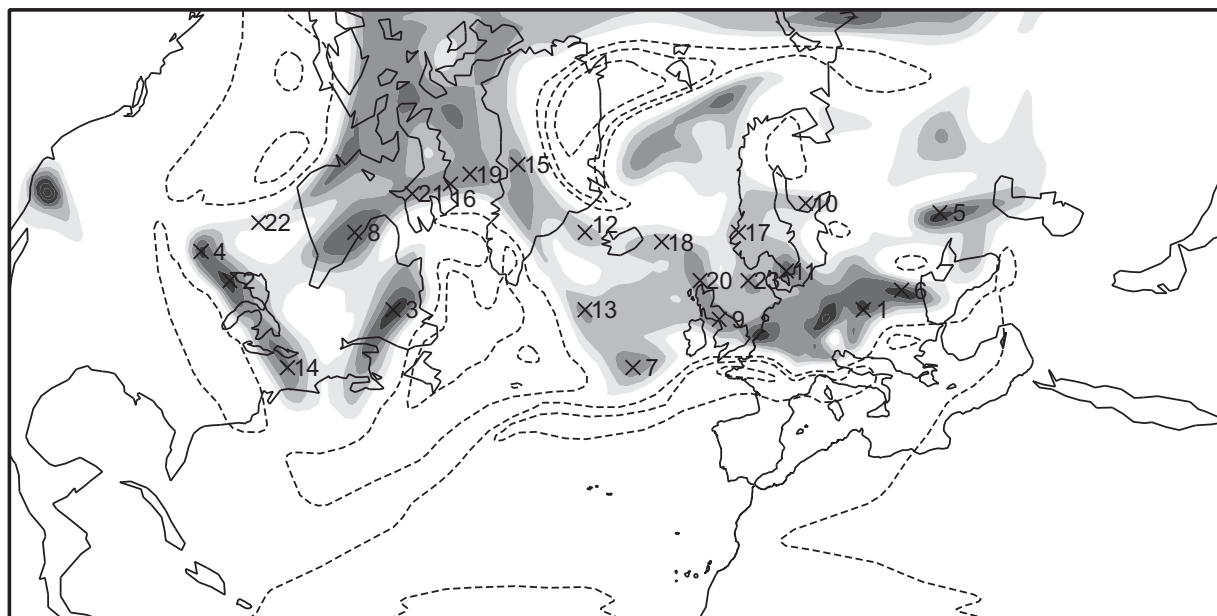


FIG. 2.37: Numérotation des structures après leur extraction. Elles sont classées par ordre décroissant de la valeur au pic de la structure reconstruite.

positif. Ce pôle est en général bien corrélé avec la forme des structures du champ initial, cette propriété est remarquable pour les structures 2, 3 et 7. Il est important de noter que ceci est le résultat de l'utilisation du cylindre d'influence. Comme montré dans l'article joint (Chap. 4), les coefficients de petite échelle servent à moduler localement la structure sur toute son étendue. Par comparaison, le cône d'influence exercerait une modulation correcte uniquement autour du pic de la structure, donc la reconstruction serait incomplète.

La méthode permet l'extraction de pôles négatifs autour de la structure. Il est important de rappeler qu'une structure formée d'un ensemble de coefficients d'ondelettes a une moyenne nulle par construction. Donc, la contrepartie du pôle central positif peut prendre la forme d'une grande région négative de faible amplitude ou de pôles négatifs bien définis, selon les propriétés du champ initial.

On remarque que les structures les mieux reconstruites (1,2,3,5,7,8,9) sont parmi les premières du classement, donc celles qui ont l'amplitude en leur pic la plus grande. Celles-ci sont donc à garder en priorité. Leur bonne reconstruction valide *a posteriori* le bien-fondé de l'algorithme et des paramètres ajustables. Néanmoins, certaines structures sont pathologiques, soit parce que leur reconstruction pose problème (11,12) ou que leur significativité en tant que structure jouant un rôle dynamique est faible (10,13,14,15,16,17,18,19). Par exemple, la structure 11 est une reproduction de la structure 1, mais d'échelle supérieure, ce qui génère une structure avec un pôle négatif non pertinent à grande distance.

Un autre problème de l'algorithme est l'existence de structures doubles, c'est-à-dire extraites indépendamment deux fois, intégralement ou en partie (4,6). Ceci pourra être résolu en forçant les structures à ne pas être redondantes. Les échelles de certaines structures ne sont pas correctes,

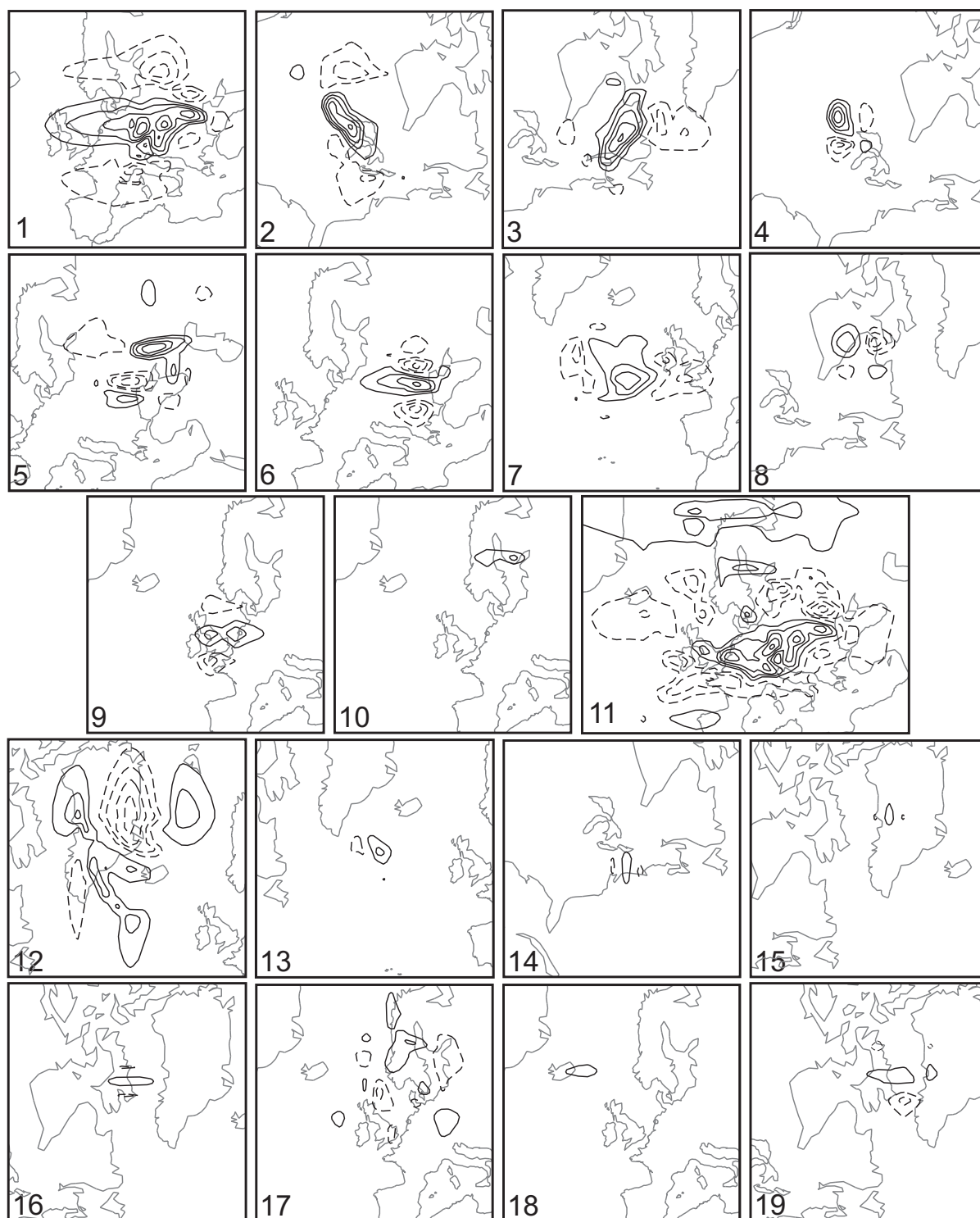


FIG. 2.38: Structures reconstruites par le cylindre d'influence, classées dans l'ordre de la Fig. 2.37. Intervalle : 1 pvu. Les structures à partir de 20 ne sont pas montrées car elles sont de petite taille et de faible amplitude (elles ressemblent à la 18 ou 19).

par exemple la 14, qui devrait être de plus grande échelle.

Les défauts de la méthode proviennent en grande partie de la méthode de sélection des coefficients d'ondelettes, qui est figée *a priori* par le cylindre d'influence. Celle-ci est satisfaisante pour des structures faiblement anisotrope, mais pose problème dès lors que la structure est plus allongée. Les correctifs possibles de l'algorithme seront présentés plus loin, après la présentation de la non-redondance des structures.

2.2.3 Construction d'un ensemble de structures orthogonales

L'ensemble des structures extraites (Fig. 2.38) ne permet pas de construire le champ initial car il y a une forte redondance entre elles. On a vu de plus que certaines structures sont extraites plusieurs fois, ce qui n'est pas satisfaisant. La redondance entre les structures signifie que la somme des structures extraites est supérieure (au sens local ou intégré) au champ initial, ce qui revient à dire qu'il y a des corrélations importantes entre les structures. Les méthodes classiques de segmentation d'image séparent une image en un ensemble de régions disjointes de l'espace : chaque région est donc orthogonale à toutes les autres. Dans le cas de la méthode d'extraction par les ondelettes, le fait de ne pas extraire les structures dans un même espace de fonctions orthogonales (OWT) engendre une non-orthogonalité entre les structures. On pourra ainsi obtenir une représentation non-redondante si les structures sont orthogonales. Deux ondelettes SWT sont orthogonales s'ils appartiennent à une même base OWT tout en étant différents ou s'ils sont suffisamment éloignés dans l'espace physique. L'obtention d'une représentation non redondante du champ initial par un ensemble de structures peut se faire en orthogonalisant les structures entre elles.

Soit $\{s_i, 1 \leq i \leq n\}$ l'ensemble des structures extraites. Chaque structure est ainsi un vecteur d'état du système, défini de façon équivalente par les valeurs sur la grille du domaine ou par un nombre limité de coefficients d'ondelettes d'une même base. À partir du produit scalaire canonique $\langle \cdot, \cdot \rangle$ on définit une matrice de corrélation entre les structures par :

$$C = (C_{i,j}) = \left(\left| \frac{\langle s_i, s_j \rangle}{\langle s_i, s_i \rangle} \right| \right)$$

La matrice obtenue à l'issue de l'extraction sur le champ traité précédemment apparaît sur la Fig. 2.39. L'algorithme ayant banni les structures à norme faible, chaque coefficient de corrélation est bien défini. La diagonale est unitaire et les autres coefficients sont généralement compris entre 0 et 1. Il se peut exceptionnellement qu'un coefficient soit légèrement supérieur à 1.

On peut interpréter les coefficients de corrélation entre deux structures s_i et s_j de façon assez simple, par généralisation de structures monopolaires (Fig. 2.40). Si les deux structures sont disjointes, alors les coefficients sont nuls. À l'inverse, si une structure est incluse dans une autre, alors un des coefficients est proche de 1, l'autre étant compris entre 0 et 1. Entre ces deux cas, si les deux structures se recoupent sans qu'il y ait inclusion, alors les deux coefficients sont compris entre 0 et 1.

Le cas des structures extraites (Fig. 2.38) illustre de tels cas de figure. Par exemple, la structure 4 est incluse dans la structure 2, ce qu'on voit dans la matrice de corrélation puisque $C_{4,2} \simeq 1$

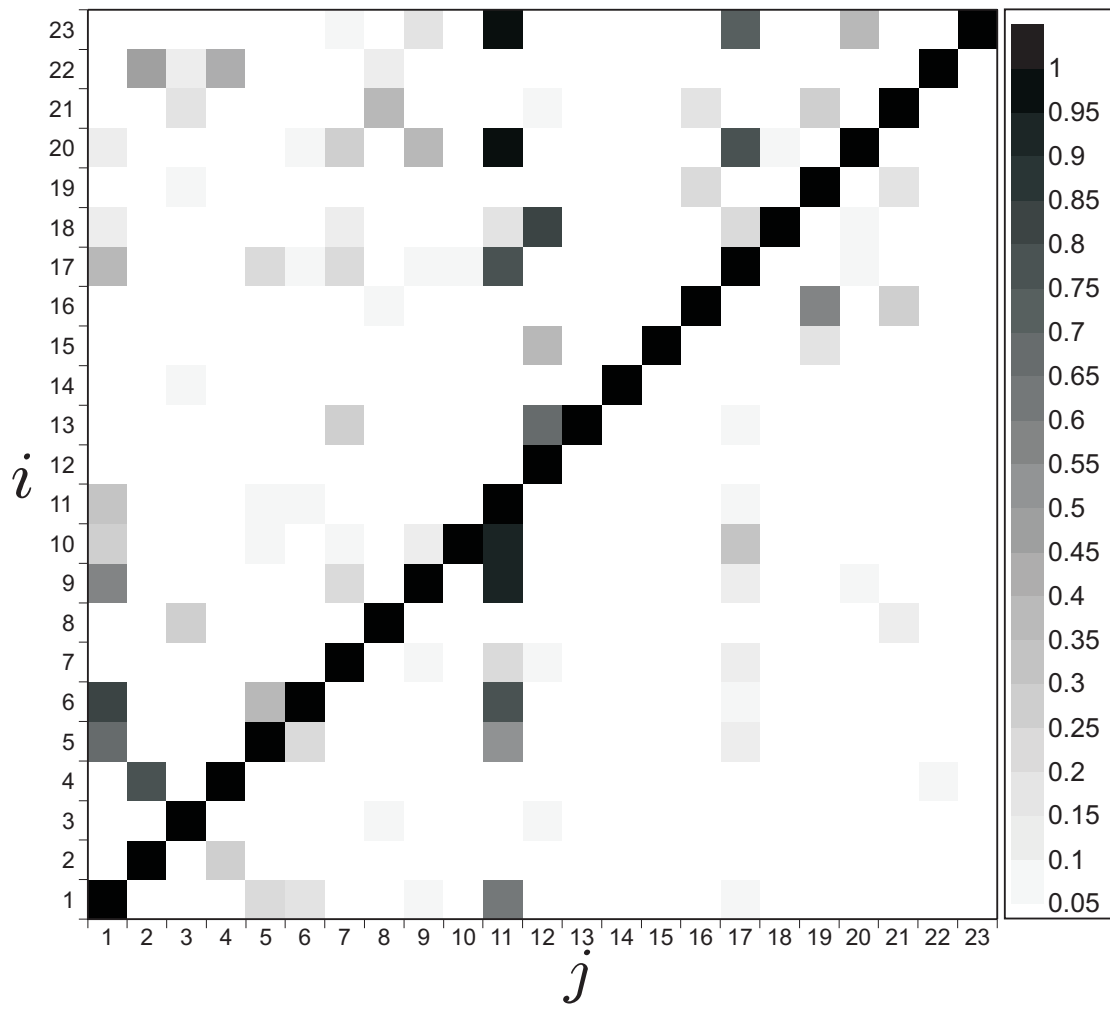


FIG. 2.39: Matrice de corrélation entre les 23 structures extraites de la Fig. 2.38.

et $0 < C_{2,4} < 1$. La structure 11, dans laquelle beaucoup d'autres structures sont incluses, a une colonne $C_{i,11}$ comprenant beaucoup de valeurs proches de 1. En revanche, la ligne $C_{11,j}$ est d'amplitude plutôt faible.

Dans le cas des structures définies en ondelettes, on peut faire appel à cette notion d'inclusion pour évoquer la redondance entre structures. Chaque structure est en effet une partie du champ total initial. En particulier, la valeur absolue de chaque point de grille d'une structure est inférieure ou égale (éventuellement très légèrement supérieure) à la valeur absolue du champ initial. Tout se passe comme si on séparait un champ total en des régions définies dans l'espace des ondelettes. Les structures résultantes ne sont pas des régions bien définies, mais plutôt des sous-champs locaux dont les valeurs sont comprises entre 0 et les valeurs du champ initial. On retrouve ainsi la notion d'inclusion présentée sur la Fig. 2.40.

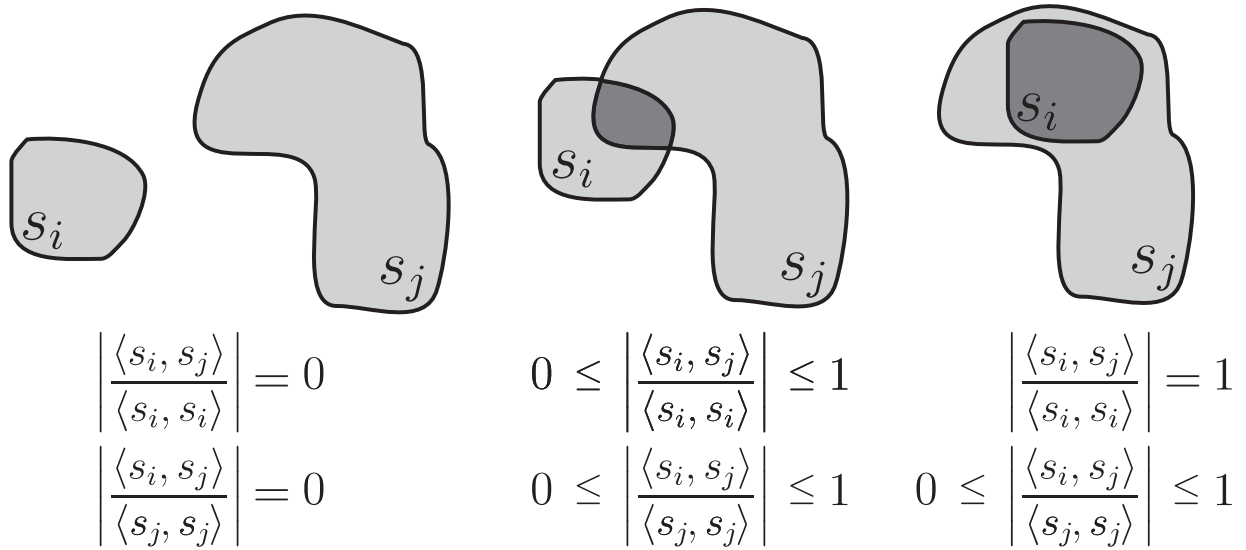


FIG. 2.40: Interprétation des coefficients de la matrice de corrélation en fonction de l'intersection de deux structures.

L'orthogonalisation des structures se fait en partant du principe de l'orthogonalisation de Schmidt, en traitant successivement chaque vecteur. Il faut donc préalablement avoir classé les vecteurs dans un ordre ; dans un premier temps ce sera l'ordre de la Fig. 2.38 (ordre décroissant de la valeur du pic reconstruit).

Supposons que $\{s_i, 1 \leq i \leq k-1\}$ soit un ensemble de vecteurs orthogonaux, et soit s_k une structure donnée. On cherche à orthogonaliser s_k par rapport aux précédentes $\{s_i, 1 \leq i \leq k-1\}$.

La méthode d'orthogonalisation de Schmidt consisterait retirer de s_k son projeté sur l'espace vectoriel $\text{Vect}\{s_i, 1 \leq i \leq k-1\}$. Ainsi, le vecteur

$$s_k^\perp = s_k - \sum_{i=1}^{k-1} \frac{\langle s_i, s_k \rangle}{\langle s_i, s_i \rangle} s_i \quad (2.7)$$

est orthogonal aux précédents ; on prend $s_k = s_k^\perp$; l'ensemble $\{s_i, 1 \leq i \leq k\}$ est donc un ensemble de vecteurs orthogonaux ; on peut donc ensuite traiter s_{k+1} . On va voir cependant que

cette formule n'est pas satisfaisante si on veut maintenir une description locale de la structure.

s_k s'écrit dans la base d'ondelettes orthogonales W^k par un ensemble de coefficients :

$$s_k = \sum_j \sigma_j^k w_j^k$$

Dans cette base, seuls les coefficients du cylindre d'influence de la structure sont non nuls. En écrivant la formule d'orthogonalisation (2.7), on voit qu'on ajoute à la structure initiale s_k toutes les autres structures pondérées par leur corrélation avec s_k , ce qui a pour effet de générer une structure s_k^\perp qui n'est plus du tout localisée dans les limites du cylindre d'influence de s_k . La structure résultante est donc étalée dans l'espace, et en partie colocalisée avec les autres structures.

Pour résoudre ce problème, on propose d'écrire une formule d'orthogonalisation restreinte à l'espace des coefficients non nuls de s_k . Soit donc $\{w_j^k\}$ le sous-ensemble de la base W^k où se projette effectivement s_k . On a ainsi :

$$s_k = \sum_j \sigma_j^k w_j^k = \sum_j \sigma_j^k w_j'^k$$

Les autres structures peuvent être projetées dans la base W^k , même si elle n'est pas forcément leur base d'ondelettes de construction :

$$s_i = \sum_j \sigma_j^i w_j^k, \quad 1 \leq i \leq k-1$$

On peut décomposer ces structures sur l'espace vectoriel $\text{Vect} \{w_j'^k\}$, et sur son orthogonal :

$$s_i = s_i' + s_i^o, \quad s_i = \sum_j \sigma_j^i w_j'^k, \quad \langle s_i^o, s_k \rangle = 0$$

Écrivons donc l'orthogonalisation de s_k par rapport à $\{s_i', 1 \leq i \leq k-1\}$, en recherchant s_k^\perp par les coefficients $\{\alpha_i, 1 \leq i \leq k-1\}$ tels que :

$$s_k^\perp = s_k - \sum_{i=1}^{k-1} \alpha_i s_i'$$

$$\langle s_k^\perp, s_i \rangle = \langle s_k^\perp, s_i' \rangle = 0, \quad 1 \leq i \leq k-1$$

En calculant le produit scalaire de la première équation avec les structures $\{s_j', 1 \leq j \leq k-1\}$, on en déduit :

$$\sum_{i=1}^{k-1} \alpha_i \langle s_i', s_j' \rangle = \langle s_k, s_j' \rangle, \quad 1 \leq j \leq k-1$$

Ainsi, il faut résoudre le système linéaire :

$$\begin{pmatrix} \langle s'_i, s'_j \rangle \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_{k-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \langle s_k, s'_1 \rangle \\ \vdots \\ \langle s_k, s'_{k-1} \rangle \end{pmatrix}$$

Il s'agit donc d'inverser une matrice symétrique, qui n'est pas forcément inversible. Dans le cas de l'orthogonalisation de Schmidt, cette matrice est diagonale et définie positive. La restriction de l'espace des vecteurs a donc rendu le processus d'orthogonalisation plus complexe. Dans un premier temps, il est donc nécessaire de vérifier l'inversibilité de la matrice. Si elle est inversible, l'orthogonalisation peut être appliquée comme détaillé jusqu'ici. Sinon, il s'agit de traiter correctement le problème.

La matrice à inverser peut aussi s'écrire

$$\begin{pmatrix} \langle s'_i, s'_j \rangle \end{pmatrix} = \mathbf{M} = {}^t\mathbf{S}\mathbf{S} \text{ avec } \mathbf{S} = \begin{pmatrix} s'_1 \cdots s'_j \cdots s'_{k-1} \end{pmatrix}$$

Ainsi, une condition nécessaire à l'inversibilité de \mathbf{M} est qu'aucun vecteur s'_1, \dots, s'_{k-1} ne soit nul. Il est donc important de calculer l'orthogonal de s_k uniquement par rapport aux structures qui se projettent sur les ondelettes de s_k . Malgré cette précaution, garantir l'inversibilité de la matrice \mathbf{M} n'est pas certain. La technique d'inversion procède donc d'abord en une diagonalisation de la matrice \mathbf{M} (symétrique), qui permet de tester son inversibilité. Si elle l'est, alors son inversion donne s_k^\perp , structure orthogonale à ces prédécesseurs. Sinon, il n'est pas possible d'avoir orthogonalité. On peut s'en approcher en inversant les valeurs propres non nulles de \mathbf{M} et en suivant la formule proposée dans l'Annexe 3.

La grande majorité des cas rencontrés a donné lieu à une matrice inversible.

Résumons donc l'ensemble du processus d'orthogonalisation, qui consiste à calculer l'ensemble de structures orthogonales $\{s_i^\perp, 1 \leq i \leq n\}$ à partir de l'ensemble des structures non orthogonales extraites $\{s_i, 1 \leq i \leq n\}$:

- classer les structures dans un ordre de priorité tel que les structures sont les mieux reconstruites ; dans un premier temps, on les classe dans l'ordre décroissant de la valeur reconstruite au pic ;
- application de l'algorithme d'orthogonalisation successif :
 - $s_1^\perp = s_1$; $n^\perp = n$
 - de $k = 2$ à n^\perp , orthogonaliser s_k par rapport à $\{s_i^\perp, 1 \leq i \leq k-1\}$ dans l'espace des coefficients non nuls de s_k par le processus décrit plus haut ;
 - si le résultat s_k^\perp conserve une norme et une valeur au pic significative, on la garde ; sinon on la supprime et $n^\perp = n^\perp - 1$;
- le résultat $\{s_i^\perp, 1 \leq i \leq n^\perp\}$, est un ensemble de structures non nulles orthogonales. Éventuellement, si la matrice ${}^t\mathbf{S}\mathbf{S}$ n'est pas inversible pour une structure, l'orthogonalité stricte de celle-ci avec ses prédécesseurs n'est pas garantie.

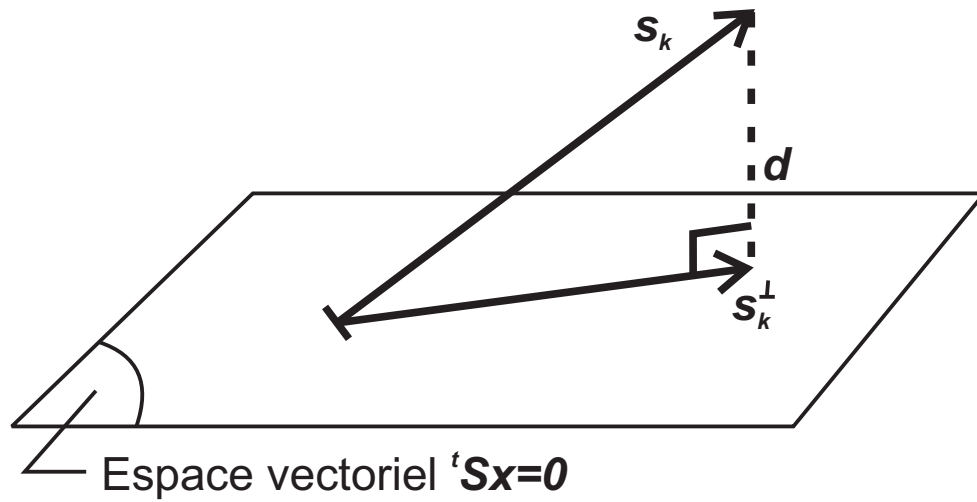


FIG. 2.41: Schéma du principe du projeté orthogonal de s_k sur l'espace $\text{Ker}({}^t\mathbf{S})$. Ce projeté est aussi le vecteur de l'espace ${}^t\mathbf{S}\mathbf{x} = 0$ qui minimise la distance $d = \|x - s_k\|$.

L'orthogonalisation peut aussi s'interpréter en terme de minimisation sous contrainte. Posons le problème d'une autre manière, dont nous allons voir que la solution est la même que celle de l'orthogonalisation détaillée jusqu'ici.

Partant du vecteur s_k , on cherche un vecteur x tel que x soit orthogonal à un ensemble de vecteurs s_1, \dots, s_{k-1} , et tel que la distance $d = \|x - s_k\|$ soit minimale. L'espace total est restreint à l'espace des coefficients d'ondelettes où la structure s_k a un coefficient non nul. Ainsi, on définit les vecteurs s'_1, \dots, s'_{k-1} , comme précédemment, c'est-à-dire les projetés de s_1, \dots, s_{k-1} sur l'espace des coefficients d'ondelettes non nuls de s_k , et la matrice \mathbf{S} dont les colonnes sont les vecteurs s'_1, \dots, s'_{k-1} . Ce problème est la minimisation d'une distance sous une contrainte linéaire, qui est l'orthogonalité à l'ensemble des vecteurs, soit ${}^t\mathbf{S}\mathbf{x} = 0$. Comme le montre la Fig. 2.41, sa solution unique est le projeté orthogonal de s_k sur l'espace vectoriel $\text{Ker}({}^t\mathbf{S})$.

Or, le problème d'orthogonalisation vu précédemment s'écrit $s_k^\perp = s_k - \sum_{i=1}^{k-1} \alpha_i s'_i$. D'après les résultats du processus d'orthogonalisation, on sait que $s_k^\perp \in \text{Ker}({}^t\mathbf{S})$ et $s_k^\perp - s_k$ est orthogonal à l'espace $\text{Ker}({}^t\mathbf{S})$. Comme le projeté orthogonal de s_k sur $\text{Ker}({}^t\mathbf{S})$ est unique et que la solution du problème d'orthogonalisation vérifie ses propriétés, on en déduit que l'orthogonalisation et le problème de minimisation sous contrainte ont la même solution, si elle existe.

Ainsi, l'orthogonalisation est équivalente à chercher la structure s_k^\perp la plus proche de s_k qui est orthogonale à toutes les structures s_1, \dots, s_{k-1} , en ne modifiant que les coefficients d'ondelettes non nuls de s_k . On cherche donc à dégrader s_k le moins possible tout en lui conservant la structure restreinte au cône d'influence. Cette approche ouvre aussi à une autre résolution numérique du problème, qui n'a pas été testée. En particulier, elle permettrait de traiter différemment le cas où la matrice ${}^t\mathbf{S}\mathbf{S}$ n'est pas inversible.

L'orthogonalisation se fait par traitement successif des structures. Par conséquent, le résultat dépend du classement initial choisi pour les orthogonaliser. En particulier, la première structure n'est jamais modifiée. Le critère de classement pourra être amélioré, notamment en prenant en compte la cohérence temporelle des structures (voir la section 2.3).

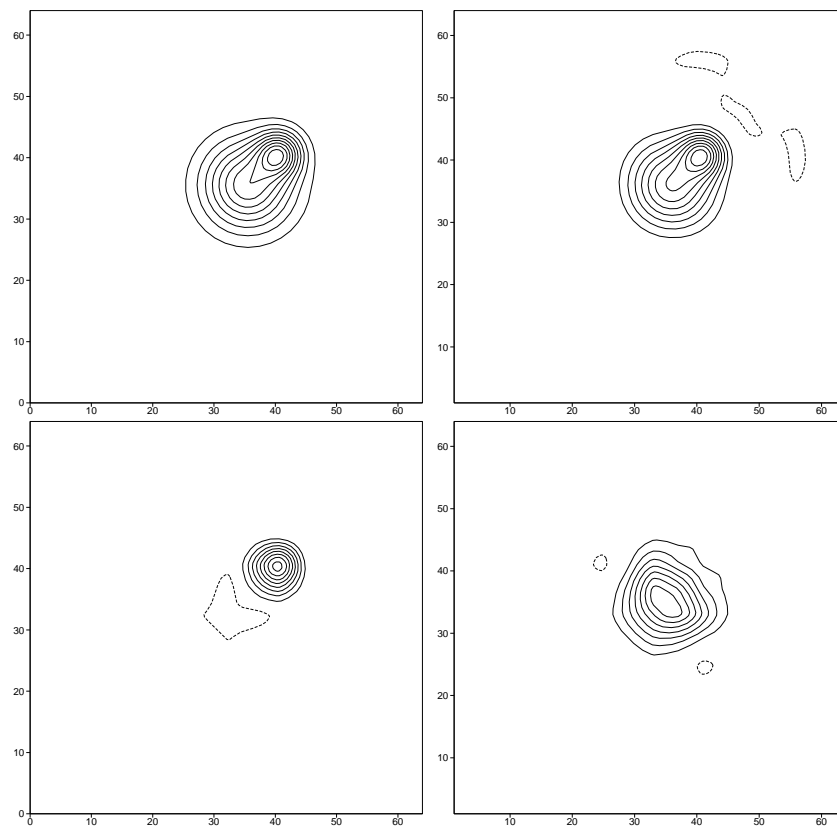


FIG. 2.42: Illustration de l'orthogonalisation sur le cas de deux structures proches (en haut à gauche, repris de la Fig. 2.33). La structure d'échelle 5 reconstruite par l'algorithme (en haut à droite) comprend intégralement la structure d'échelle 4 voisine ; elle est donc redondante avec celle-ci. Si on reconstruit la structure d'échelle 4 (en bas à gauche), puis qu'on orthogonalise la structure d'échelle 5 par rapport à la celle d'échelle 4 (en bas à droite), on évite la redondance.

Pour illustrer l'intérêt de l'orthogonalisation, on l'applique au cas idéalisé de deux structures voisines de la Fig. 2.33. Deux structures Gaussiennes voisines d'échelle différente (4 et 5) sont extraites. L'extraction de la structure d'échelle 4 est correcte (Fig. 2.33), même si son amplitude est légèrement plus forte que la structure initiale. En revanche, l'extraction de la structure d'échelle 5 (Fig. 2.42) reproduit la structure voisine. Par conséquent, il y a nécessité de l'orthogonaliser par rapport à sa voisine, qui demeurera inchangée. Le résultat (Fig. 2.42) donne une structure d'où le pôle d'échelle 4 a disparu. Remarquons l'importance de l'ordre de l'orthogonalisation. Si on avait orthogonalisé la structure d'échelle 4 par rapport à celle d'échelle 5, elle aurait quasiment disparu.

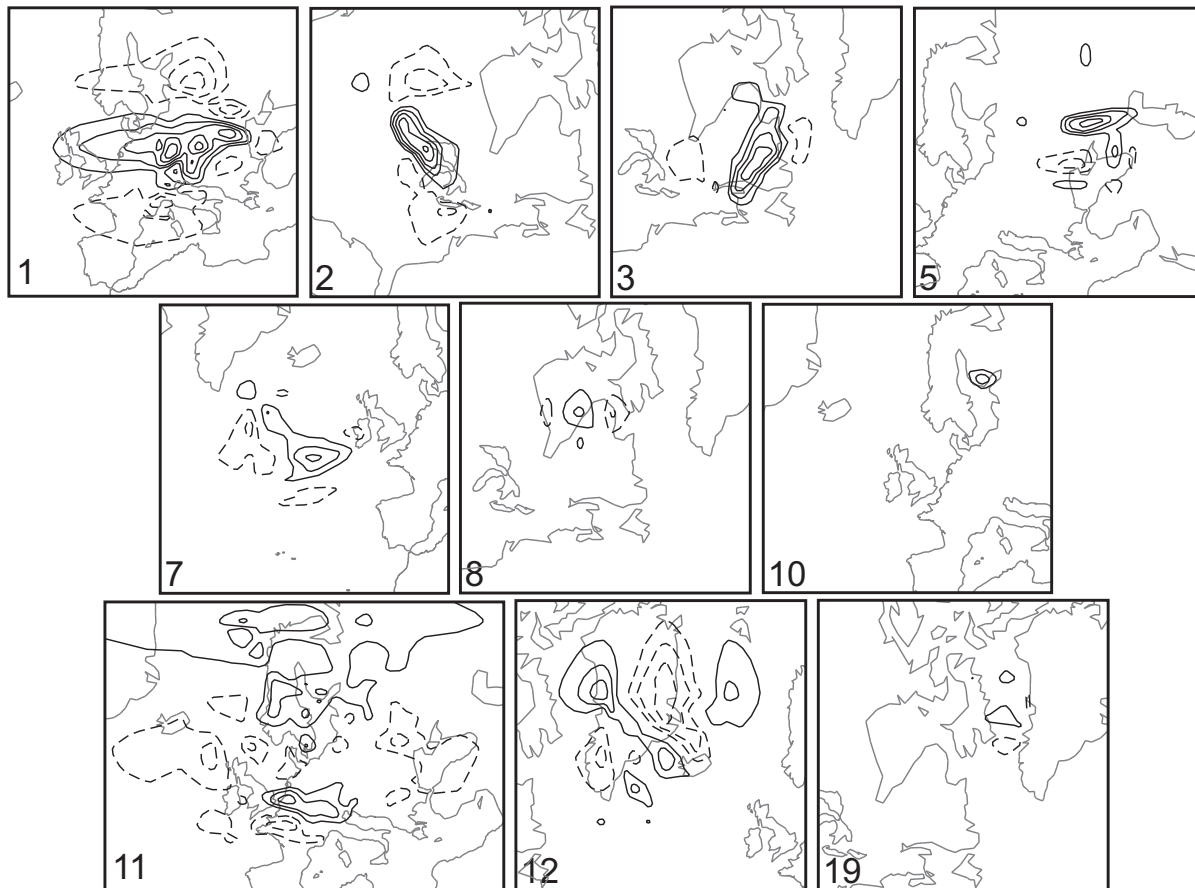


FIG. 2.43: Structures de la Fig. 2.38 après orthogonalisation. Seules les structures conservées après orthogonalisation apparaissent, en gardant le même numéro que les structures extraites initialement.

Sur l'exemple des structures extraites de la Fig. 2.38, l'orthogonalisation permet de conserver 12 structures (Fig. 2.43). On obtient des structures bien disjointes. Les structures conservées sont plus ou moins modifiées par l'orthogonalisation.

La structure 4, qui était incluse dans la 2, est éliminée par l'orthogonalisation, car redondante. La structure 11, qui était pathologique, est maintenant fortement diminuée en son centre grâce à l'orthogonalisation par rapport à la structure 1. La structure 7, qui est le précurseur d'une

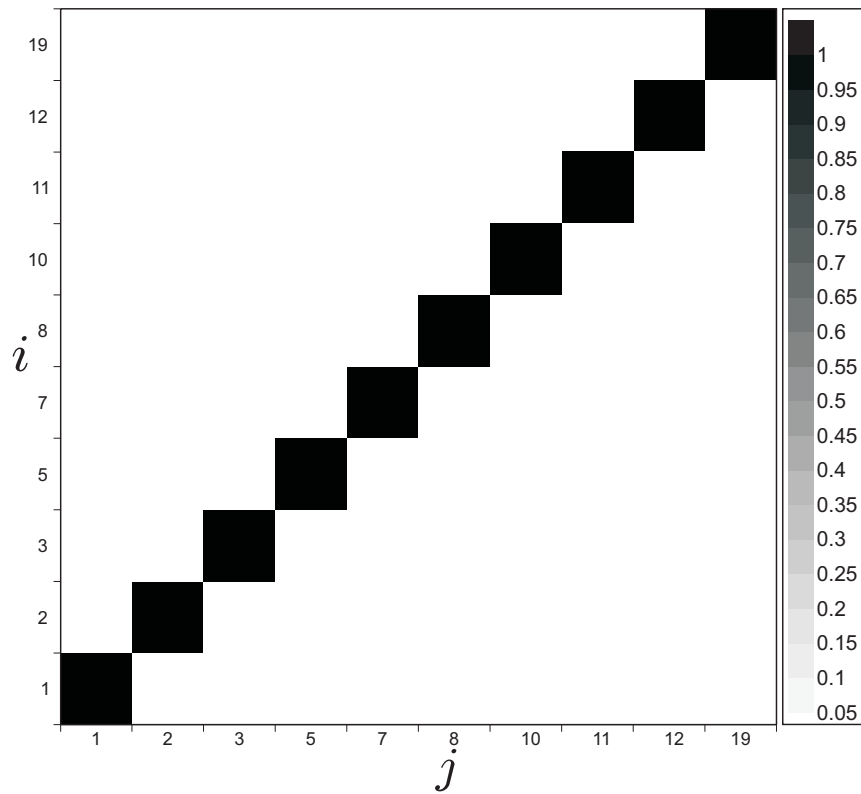


FIG. 2.44: Matrice de corrélation entre les 10 structures restant après orthogonalisation.

tempête (étudiée dans l'article joint en Chap. 4) est modifié par l'orthogonalisation dans sa partie Est. Cette modification résulte de l'orthogonalisation par rapport à la structure 1, dont la reconstruction est imparfaite : dans sa partie Ouest, le tripole dans la direction Nord-Sud semble être davantage dû à la base d'ondelettes qu'à une réelle existence physique. En classant la structure 7 avant la structure 1, on obtiendrait au contraire une diminution de l'artefact de la structure 1 et aucune modification de la structure 7.

Les coefficients de corrélation sont tous inférieurs à 0,05 (Fig. 2.44) : on accepte donc de dire que les structures résultantes sont effectivement orthogonales.

La méthode d'orthogonalisation a été appliquée à la SWT. Cependant, elle pourrait se généraliser à d'autres types de représentation. La seule condition est que chaque structure soit représentée par un ensemble d'ondelettes qui sont orthogonales entre elles. Si on souhaite par exemple écrire les structures dans une base d'ondelettes locale qui est pivotée, ou issue d'une projection sur la sphère adaptée à chaque structure, le principe d'orthogonalisation demeure valide.

2.3 Améliorations possibles de l'algorithme

Au cours de la présentation de l'algorithme, ses principaux défauts ont pu être montrés. Ceux-ci ne devraient pas être insurmontables : de futurs développements doivent permettre de les corriger.

Un premier défaut intervient lorsque deux structures d'échelles différentes sont proches dans l'espace physique. Dans ce cas, il est possible que la détection d'échelle soit difficile, ainsi que l'attribution des coefficients à l'une des deux structures. Par exemple, la Fig. 2.33 montre que la structure d'échelle 4 intègre des coefficients qui devraient plutôt être associés à sa voisine d'échelle 5. L'orthogonalisation résout en partie ce problème (Fig. 2.42). Parfois aussi, une structure de petite échelle peut être superposée à une structure de plus grande échelle ; or si les pics de ces structures sont proches, le principe de détection d'échelle permettra seulement de traiter la plus grande structure. C'est le cas de la structure 11 de la Fig. 2.38. Il est donc des cas où il faudrait limiter la gamme d'échelle associée à une structure, en ne la faisant pas descendre jusqu'à 1. En outre, le cylindre d'influence est parfois trop rigide : pour certaines structures (1 de la Fig. 2.38 par exemple), il crée une forme artificielle.

Une difficulté de l'algorithme, qui n'apparaît pas directement ici mais dont il est question dans l'article joint (Chap. 4), est la difficulté pour l'algorithme actuel de construire correctement des structures filamenteuses. Or, les fronts, qui sont essentiels en météorologie dynamique, sont des structures filamenteuses. Ils existent autant en altitude qu'en basses couches. Avec l'algorithme actuel, on peut considérer que la limite du rapport d'aspect d'une structure pour une bonne reconstruction est 2. Lorsque la reconstruction est mauvaise, les filaments sont séparés en une collection de structures voisines disjointes qu'il faudrait être capable de raccorder entre elles.

Ces défauts devraient être résolus en couplant un suivi automatique à l'extraction. Jusqu'ici, l'extraction se fait indépendamment à chaque instant. Or, les structures ont des constantes de temps d'évolution bien distinctes, et une cohérence temporelle dont il faudrait tirer parti. Par exemple, après une première extraction conforme à l'algorithme actuel, on pourrait rechercher des modifications du cylindre d'influence qui permettent d'optimiser la cohérence temporelle

de chaque structure. On pourrait aussi appliquer le suivi aux cartes de coefficients d'ondelettes (Fig. 2.35) diagonaux afin de rechercher l'évolution des monopoles de coefficients et de les attribuer aux structures qui ont des trajectoires similaires.

De plus, le suivi devrait aussi permettre d'améliorer l'ordre des structures en entrée de l'orthogonalisation. Les structures qui gardent davantage leur cohérence au cours du temps seraient à garder en priorité et donc seraient modifiées le moins possible.

Chapitre 3

Premiers exemples d'application de l'algorithme à des phénomènes intenses

Les événements météorologiques intenses en terme de pluie ou de vent sont souvent liés à des anomalies de tourbillon potentiel. La possibilité de définir et d'extraire ces structures permet d'étudier leur rôle de façon plus objective que ce que les techniques existantes autorisent. Ce chapitre présente des explorations préliminaires de l'utilisation de l'algorithme d'extraction comme moyen d'interpréter et de documenter des phénomènes météorologiques intenses. Il ne s'agit pas de fournir une nouvelle analyse complète (un sujet en soi dans chacun des cas abordés), mais de donner une idée du potentiel de l'approche dans les domaines de l'étude de cas et de la climatologie. Revenons d'abord sur l'utilisation de la représentation en ondelettes pour séparer environnement et perturbations.

3.1 Environnement et perturbations synoptiques

Le problème de la définition des structures cohérentes d'échelle synoptique est lié à la détermination de l'environnement et des perturbations, comme expliqué dans la partie 1.4.1. En premier lieu, une nouvelle approche de séparation est présentée, encore incomplètement satisfaisante, qui consiste en une sélection spatio-temporelle des coefficients d'ondelette. Puis une nouvelle méthode de définition et de validation de la notion d'anomalie et d'environnement, basée sur l'utilisation d'un modèle numérique, est proposée.

3.1.1 Une nouvelle approche temporelle : la persistance

Classiquement, le filtrage temporel repose sur l'hypothèse qu'il existe une séparation d'échelles temporelles entre les perturbations synoptiques, rapides, et leur environnement, lent. Une période de coupure de 6 à 10 jours, qui correspond à celle des régimes de temps sur l'Atlantique Nord (Vautard, 1990) est en général utilisée.

La transformée SWT représente le champ étudié en un ensemble de coefficients d'ondelettes localisés. Si on conserve l'hypothèse de séparabilité temporelle, les coefficients d'ondelettes associés à l'environnement devraient alors évoluer lentement au cours du temps par rapport à ceux des perturbations. Afin de tester si la séparation temporelle des coefficients d'ondelettes SWT

est possible, un score de *persistance* temporelle est calculé pour chaque coefficient du champ analysé, en considérant son évolution au cours du temps. On définit ce score sur l'intervalle $[t - n, t + n]$ pour chaque coefficient d'ondelette par :

$$\frac{\sigma(f)}{m(|f|)}, \text{ avec } \sigma^2(f) = \frac{1}{2n+1} \sum_{i=n-t}^{n+t} (f(i) - m(f))^2 \text{ et } m(f) = \frac{1}{2n+1} \sum_{i=n-t}^{n+t} f(i).$$

On mesure ainsi l'écart-type de la valeur du coefficient d'ondelette sur la fenêtre temporelle. Si la persistance est importante (resp. faible), ce score varie beaucoup (resp. peu) sur la fenêtre, donc le coefficient est rapide (resp. lent).

Pour valider cette approche, il est nécessaire de mesurer la variabilité des scores de persistance pour des champs synoptiques. 100 champs consécutifs (espacés de 6 h) de tourbillon potentiel au niveau 315 K de l'hiver 1999 sont extraits d'ERA40. Ils sont projetés sur le domaine utilisé pour la transformée en ondelettes, et les scores de persistance des coefficients d'ondelettes sont calculés pour différentes fenêtres temporelles (± 6 h, ± 12 h, ± 18 h et ± 24 h), après seuillage itératif. Ces scores de persistance sont rassemblés dans des histogrammes par échelle et direction des coefficients d'ondelettes (Fig. 3.1 pour la fenêtre ± 18 h).

À la plupart des échelles et directions, on observe une distribution bimodale, avec un coefficient de séparation entre les deux pics de l'histogramme autour de 0,7. La forme des distributions est peu sensible à la taille de la fenêtre temporelle (figures non montrées), ce qui souligne la robustesse de la séparation temporelle des coefficients d'ondelettes.

Il existe donc une séparabilité temporelle dans les coefficients d'ondelettes : certains évoluent peu dans le temps, d'autres évoluent rapidement, et ce à toutes les échelles. En particulier aux petites échelles, certains coefficients sont associés à la composante lente, ce qui permettrait l'existence de gradients forts dans l'environnement. En choisissant le critère de sélection objectif 0,7, on sépare donc l'environnement (les coefficients dont la persistance est inférieure à 0,7), et les perturbations (supérieure à 0,7). L'application de cette séparation sur un champ unique est faite pour le 27 décembre 1999 à 06 TU. Pour ce champ, on observe aussi une séparation des scores de persistance temporelle. En reconstruisant chaque composante par la transformée stationnaire inverse, on obtient les champs d'environnement et de perturbation (Fig. 3.2) pour cette date.

Il y a deux avantages par rapport au filtrage temporel. Le premier est qu'on a une séparation objective des composantes lentes et rapides, basée sur la bimodalité de distributions. Le second est que la fenêtre utilisée est plus courte puisque 18 h suffisent au lieu de 72 h au mieux, ce qui nécessite moins de champs en entrée. En outre, l'intérêt principal par rapport au filtrage spatial en ondelettes (Fig. 2.34) est qu'il préserve les gradients forts dans l'environnement. Par exemple, la zone de gradient associée au courant-jet exceptionnel est bien intégrée à l'environnement, ce qui n'est pas le cas avec un filtrage spatial simple. L'environnement calculé par la persistance temporelle semble donc être plus satisfaisant.

Néanmoins, cette approche de persistance des coefficients d'ondelettes a un inconvénient lié à la base d'ondelettes utilisée. Comme celle-ci ne possède pas d'invariance par rotation, les champs d'environnement calculés ont une forte sensibilité à leur orientation par rapport aux axes du domaine. Des tests sur des gradients idéalisés le prouvent (figures non montrées). De plus, on

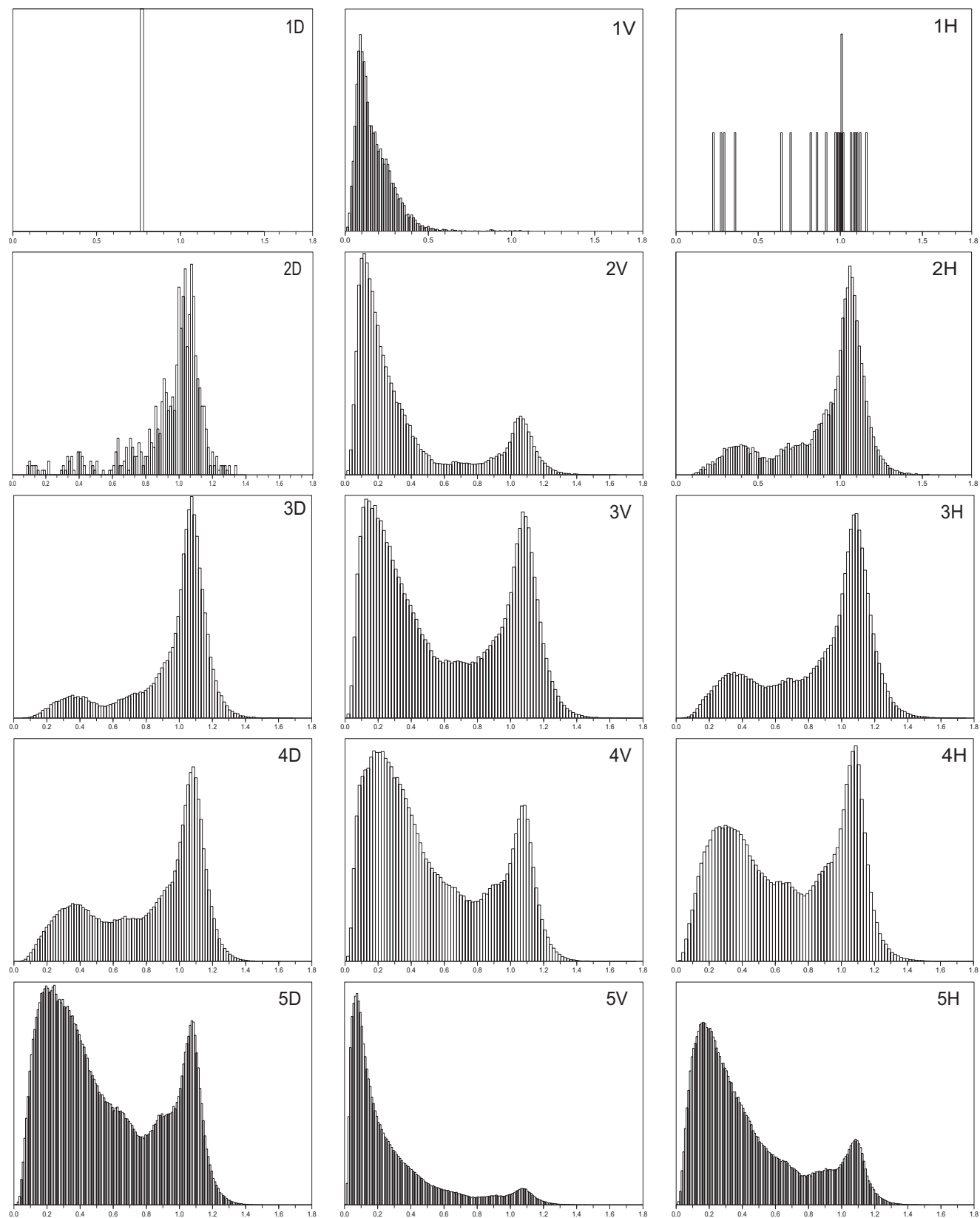


FIG. 3.1: Histogrammes des scores de persistance temporelle des coefficients d'ondelettes, après seuillage itératif, rassemblés pour 100 champs consécutifs de tourbillon potentiel à 315 K, pour chaque échelle (de 1 à 5 de haut en bas) et chaque direction (diagonale, verticale et horizontale de gauche à droite). La fenêtre temporelle choisie est ± 18 h.

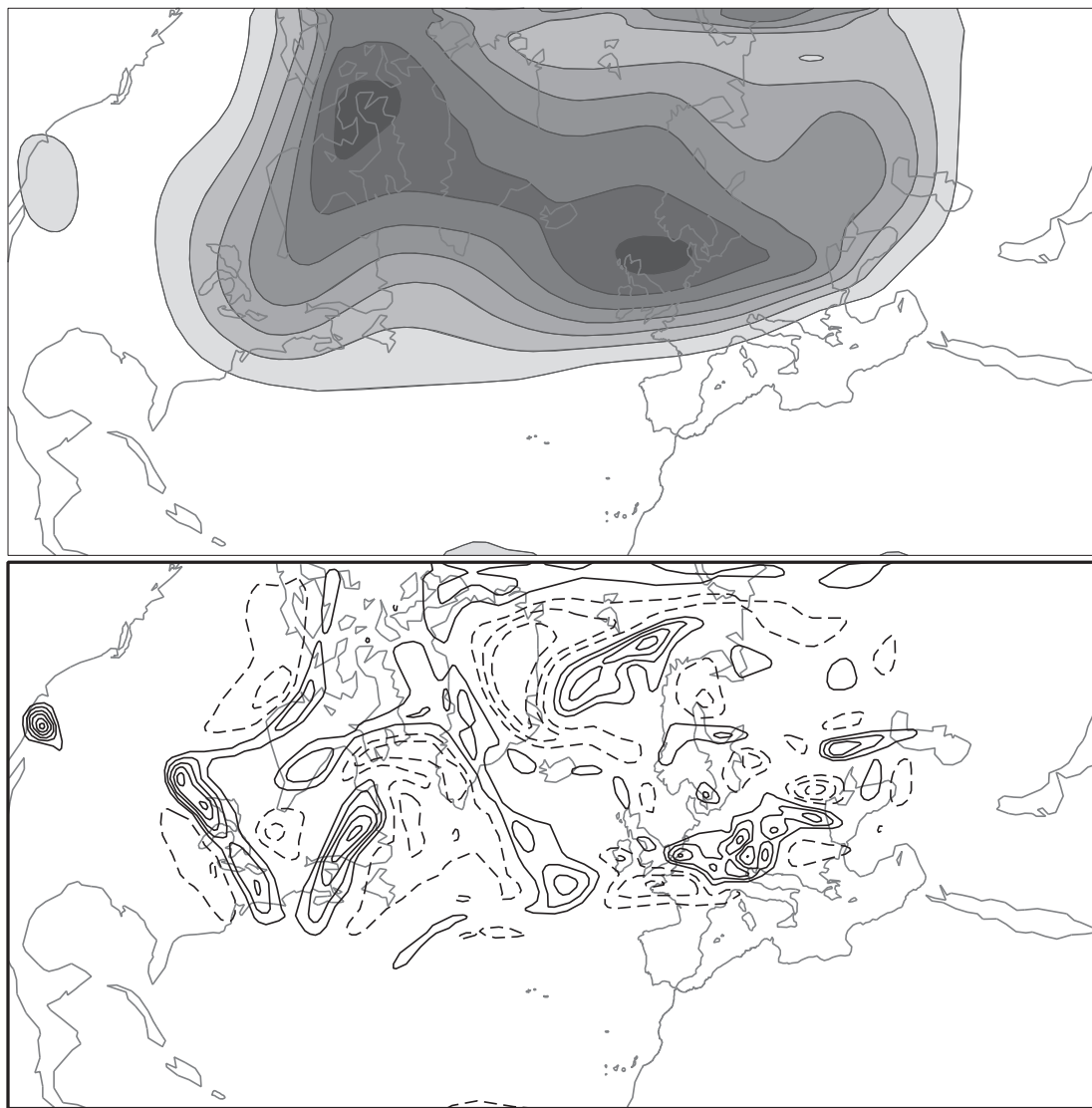


FIG. 3.2: Champ persistant (en haut) et non persistant (en bas), calculés pour une fenêtre de ± 18 h et un critère de sélection de 0,7. Intervalle des isolignes : 1 pvu. Les deux champs sont à comparer avec les champs de grande et petite échelle de la Fig. 2.34.

voit sur l'environnement de la Fig. 3.2 que les gradients sont forts au niveau de l'Europe, mais pas sur la côte Est Américaine, parce que dans le premier cas le gradient est selon l'axe y , et dans l'autre cas il est orienté à 45° par rapport aux axes du domaine. Ainsi, l'approche par persistance devra être complétée de façon à tenir compte de l'orientation des gradients, soit en utilisant une base d'ondelettes adéquate (par exemple les ondelettes complexes), soit en calculant un score de persistance agrégé qui en tienne compte.

3.1.2 Une approche diagnostique de la cohérence d'une anomalie

On a vu qu'il existe un certain nombre de techniques pour séparer environnement et anomalie et pour définir individuellement chaque anomalie. Une difficulté majeure dans la validation de ce type d'approche est qu'il n'existe pas *a priori* un ensemble environnement/anomalies de référence auquel se comparer. Un critère de cohérence temporelle est ici proposé, qui permet d'évaluer si une séparation est meilleure qu'une autre. Cette nouvelle approche repose sur l'utilisation d'un modèle numérique reproduisant de façon satisfaisante la dynamique dans laquelle évoluent les structures cohérentes.

La séparation en échelle, spatiale ou temporelle, est surtout une commodité dont la justification provient de l'existence d'échelles géophysiques privilégiées. Cette séparation est reprise par la plupart des manuels de météorologie dynamique. Mais, Malardel (2005, p. 14–15) développe de façon très pédagogique et percutante l'idée que la séparation environnement/anomalies est liée au problème de la détermination des causes et des effets. L'environnement de grande échelle donne le contexte favorable où évoluent et croissent les perturbations de petite échelle : l'environnement est donc une cause de l'évolution des anomalies. Cette approche est classique. Cependant, l'observation et des expériences numériques montrent que la petite échelle rétroagit aussi sur la grande échelle, ce qui limite l'interprétation de la séparation d'échelle. On suppose qu'un environnement idéal serait tel qu'il soit effectivement une cause externe de l'évolution de l'anomalie. Des simulations numériques vont permettre de tester ce critère.

Pour ce faire, on reprend les équations de la fin de l'article joint en Chap. 4, en changeant de point de vue. Une trajectoire dans l'espace des phases $\{\mathbf{x}_0, \dots, \mathbf{x}_t\}$ est considérée à partir de l'instant initial 0. On dispose des équations d'évolution du système, dont l'intégration non linéaire entre les instants 0 et t est désignée par l'opérateur $\mathcal{M} : \mathbf{x}_t = \mathcal{M}(\mathbf{x}_0)$. Soit l'anomalie, ou structure cohérente, $\Delta\mathbf{x}_i$ extraite à l'instant $i = 0$ ou t .

Afin de considérer toutes les causes externes d'évolution de l'anomalie, on définit l'environnement comme la différence entre le champ total et l'anomalie à chaque instant, soit $\mathbf{x}_i - \Delta\mathbf{x}_i$. Énoncer que l'environnement est indépendant de l'anomalie revient à dire qu'il est solution des équations du modèle, c'est-à-dire :

$$\mathbf{x}_t - \Delta\mathbf{x}_t = \mathcal{M}(\mathbf{x}_0 - \Delta\mathbf{x}_0)$$

Une manipulation simple de cette équation aboutit à :

$$\Delta\mathbf{x}_t = \mathcal{M}(\mathbf{x}_0) - \mathcal{M}(\mathbf{x}_0 - \Delta\mathbf{x}_0) \quad (3.1)$$

Ainsi, l'anomalie extraite à l'instant t doit être égale à chaque instant à l'état obtenu par différence entre l'état évolué avec l'anomalie et l'état évolué duquel l'anomalie a été retirée à

l'instant initial. Cette relation permet de déterminer si la méthode d'extraction donne des résultats cohérents avec la dynamique du modèle.

Une étude idéalisée permet d'illustrer cette relation en comparant deux méthodes d'extraction, l'une en ondelette, l'autre monopolaire. En premier lieu, des structures cohérentes sont obtenues comme le résultat de l'intégration d'un modèle barotrope. En deuxième lieu, on extrait une structure de cet ensemble, en utilisant les deux méthodes. Finalement, on fait évoluer les deux anomalies séparément dans un modèle quasi-géostrophique afin d'évaluer la cohérence des anomalies propagées dans le temps.

Selon McWilliams (1984, voir plus haut), le modèle barotrope non divergent diffusif voit apparaître des structures cohérentes isolées au bout d'un certain temps. Contrairement à l'atmosphère, il n'y a pas dans ce modèle de séparation d'échelle privilégiée et la turbulence est homogène isotrope. Pour appréhender les constantes de temps et d'espace du modèle, signalons que ses dimensions sont $4000 \text{ km} \times 4000 \text{ km}$, et la résolution de l'ordre de 30 km. Après l'évolution longue d'un bruit blanc Gaussien, on obtient des structures cohérentes bien individualisées (Fig. 3.3). L'une d'entre elle, notée **S**, sera extraite avant d'être propagée dans un environnement météorologique de grande échelle.

Deux méthodes d'extraction sont comparées : l'extraction en ondelettes et l'extraction d'un monopole de valeurs positives de vorticité dans un domaine donné. Ces extractions sont appliquées initialement (Fig. 3.4), où on voit que l'extraction en ondelettes reconstitue des pôles négatifs autour du pôle central. Ces deux anomalies sont placées sur la surface en altitude (tropopause) du modèle quasi-géostrophique à tourbillon potentiel uniforme (identique à celui utilisé par Plu et Arbogast, 2005), du côté cyclonique d'un courant-jet rectiligne. Le courant-jet est l'environnement sur lequel l'anomalie va évoluer de façon non linéaire.

La propagation des deux anomalies par le modèle au bout de 24 h (Fig. 3.5) montre deux comportements assez similaires. Dans les deux cas, des noyaux de vorticité négative apparaissent, même dans le cas d'une anomalie initiale monopolaire. Ainsi, si on extrait l'anomalie à l'instant final, l'extraction monopolaire ne permet pas d'obtenir ces pôles négatifs, au contraire de l'extraction en ondelettes (Fig. 3.5). Si on compare les anomalies propagées par le modèle et extraites à l'instant final, on voit que l'Eq. 3.1 est mieux respectée pour l'extraction en ondelettes que pour l'extraction monopolaire. Ceci montre que l'extraction en ondelette prend mieux en compte la cohérence temporelle des anomalies.

Dans le modèle opérationnel à équation primitive ARPÈGE, un travail similaire a été appliqué au précurseur d'altitude d'une tempête intense (voir l'article dans le Chap. 4). Il confirme le résultat que la cohérence dans le temps est meilleure pour l'extraction ondelette que pour l'extraction d'un monopole issu du champ haute-fréquence. De plus, ce cas plus réaliste montre que la vorticité relative de l'anomalie monopolaire propagée se disperse le long du courant-jet, ce qui détériore encore sa cohérence.

3.1.3 Interprétation de la cohérence des structures

Le critère de cohérence qui vient d'être écrit mérite d'être interprété de façon physique. Il signifie que l'anomalie qui est propagée par le modèle jusqu'à l'instant t , comme étant la différence entre deux simulations, l'une avec l'anomalie initiale, l'autre sans, doit être égale à l'anomalie

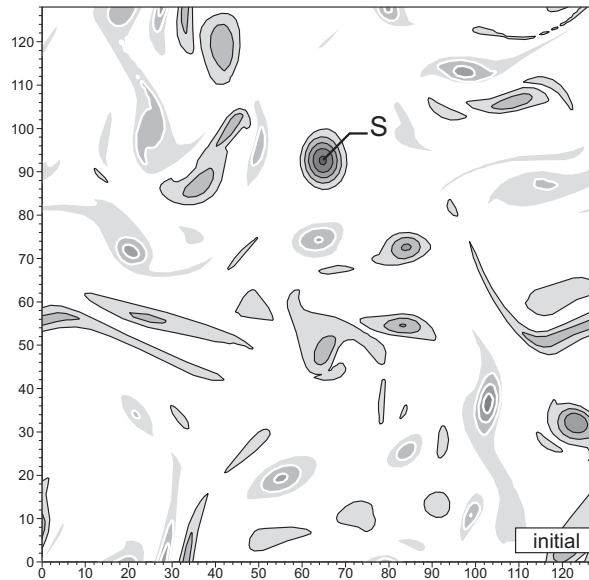


FIG. 3.3: Vorticité (unité $5 \cdot 10^{-5} \text{ s}^{-1}$, positive en contour plein, négative en pointillés) à l'instant initial, dans le modèle barotrope. La structure extraite est marquée par S .

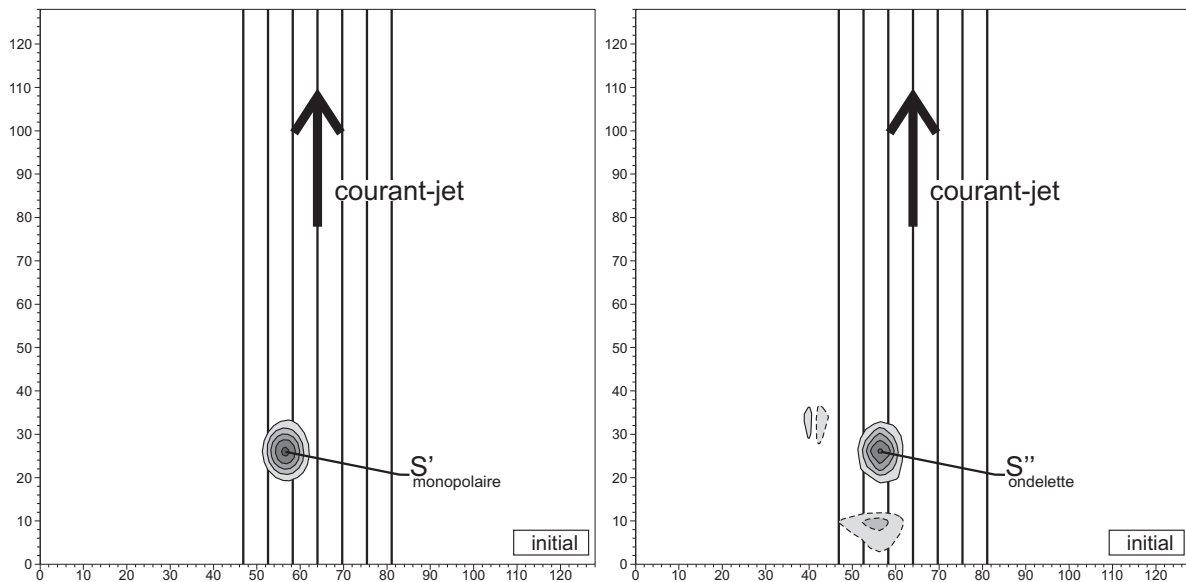


FIG. 3.4: Extraction de l'anomalie S à l'instant initial (Fig. 3.3), par l'extraction monopolaire (S' , à gauche) et la méthode ondelette (S'' , à droite). Mêmes isolignes que la Fig. 3.3. Les anomalies sont ici placées dans le modèle quasi-géostrophique à tourbillon potentiel uniforme et superposées à un courant-jet.

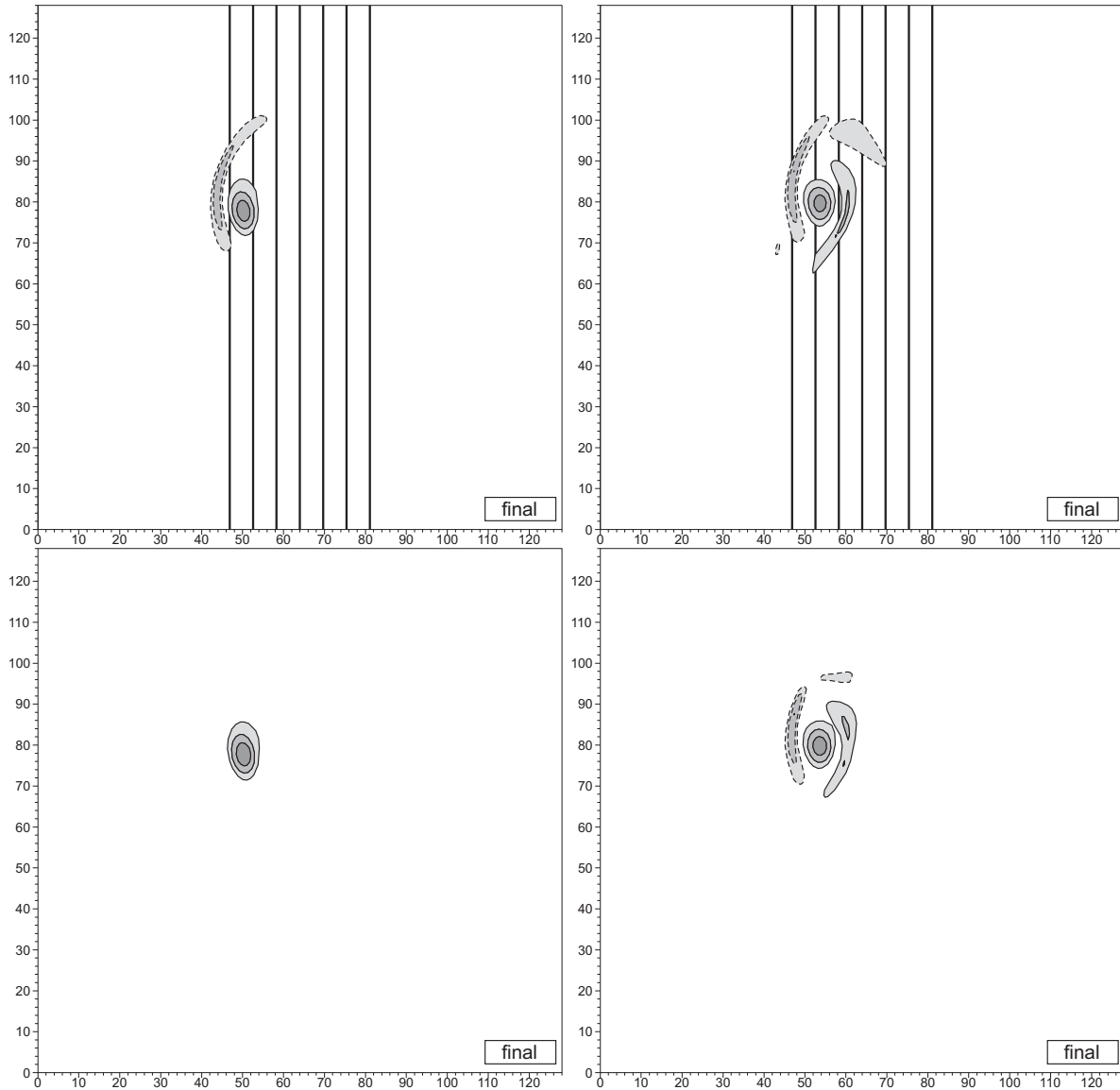


FIG. 3.5: Comparaison de la cohérence des deux méthodes d'extraction (à gauche : monopolaire, à droite : ondelette). Les deux anomalies propagées par le modèle jusqu'à l'instant final (24 h) sont en haut. Les extractions des anomalies à l'instant final figurent en bas. Mêmes isolignes que la Fig. 3.3.

extraite à l'instant t . Par conséquent, l'anomalie propagée doit rester locale et compacte dans le temps ; sa dispersion doit donc demeurer limitée. Cette propriété correspond à la définition rigoureuse d'une structure cohérente, ou d'un soliton, c'est-à-dire d'un paquet d'onde qui ne se disperse pas dans un régime non linéaire.

Or, la dispersion des systèmes météorologiques d'échelle synoptique, en particulier des ondes de Rossby, est un phénomène bien connu, appelé *développement amont-aval* (Simmons et Hoskins, 1979). Comme on le voit sur l'expérience idéalisée (Fig. 3.5), les anomalies initiales deviennent multipolaires ; elles se dispersent. Une extraction multipolaire locale telle que l'algorithme en ondelettes permet de mieux capturer les anomalies ayant évolué dans un tel modèle.

En conclusion de sa thèse, Arbogast (1998, p. 214) fait justement le lien entre attribution et développement amont-aval. Il écrit : « la répercussion dans le temps d'une action locale sur le tourbillon potentiel n'est pas locale ! », ce qui rend difficile l'attribution des champs météorologiques à une anomalie au cours du temps. Il l'explique principalement par la dispersion des trains d'ondes de Rossby. La méthode d'extraction employée est monopolaire (Chaigne et Arbogast, 2000), qui ne permet pas de reproduire la dispersion, même faible, de l'anomalie initiale.

En conséquence, si la dispersion est limitée, l'extraction en ondelettes doit permettre d'améliorer la cohérence temporelle des anomalies extraites, et donc de mieux résoudre le problème de l'attribution au cours du temps. Si en revanche la dispersion est très forte, dans un régime linéaire par exemple, il sera préférable d'utiliser des techniques ondulatoires.

3.2 Étude du rôle d'un rapide de jet

Comme exemple de l'utilisation de l'algorithme, l'extraction du rapide de jet associé à une tempête intense doit permettre de mieux comprendre les mécanismes à l'origine du déclenchement de la tempête.

3.2.1 Définition d'un rapide de jet

Les rapides de jet (*jet-streak* en anglais) sont des accélérations locales du vent sur l'axe d'un courant-jet, qui contribuent souvent aux cyclogenèses les plus explosives. L'interprétation dynamique des rapides de jet peut se faire à l'aide d'un modèle conceptuel, comme celui montré sur la Fig. 3.6. Selon ce modèle, l'accélération du vent est due à l'existence d'un vortex cyclonique du côté froid du jet et anticyclonique du côté chaud. Ce modèle conceptuel est confirmé par des simulations idéalisées. Dans un modèle quasi-géostrophique, Cunningham et Keyser (2004) montrent que l'implémentation d'un vortex dipolaire placé tel que sur la Fig. 3.6 reproduit les caractéristiques des rapides de jet. Ils montrent aussi qu'un seul noyau cyclonique du côté froid du courant-jet peut suffire à créer un rapide de jet.

Ainsi, des structures tourbillonnaires sont responsables des rapides de jet. Une étude diagnostique de rapides de jet observés (Pyle et al., 2004) corroborent cette idée en montrant l'existence d'une structure cohérente de tourbillon potentiel du côté froid. Ce type de structure se déplace lentement, et peut être suivie pendant plusieurs semaines.

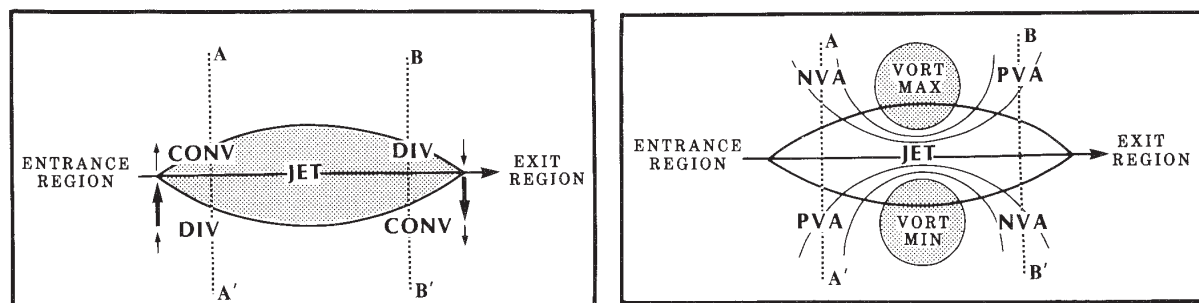


FIG. 3.6: À gauche, modèle à quadrants du rapide de jet rectiligne, avec les zones de convergence (CONV) et divergence (DIV) associées (basé sur Bjerknes, 1951). À droite, position des noyaux de vorticité cycloniques (VORT MAX) et anticycloniques (VORT MIN) et circulation confluyente en entrée et diffluente en sortie de jet (Riehl et Collaborators, 1952). La figure est d'après Uccellini (1990).

L'objectif de cette section est de montrer la possibilité d'extraire une telle structure et de montrer son rôle dynamique sur le déclenchement d'une cyclogénèse. Les études antérieures de sensibilité à la présence d'anomalies de tourbillon potentiel n'ont jamais traité la question des rapides de jet. La structure associée au jet-streak évolue lentement ; un filtrage temporel de période 6 à 8 jours ne permettrait pas de l'extraire correctement.

3.2.2 Extraction d'un rapide de jet

La première tempête de Noël 1999, appelée Lothar ou T1, frappa la partie Nord de la France puis l'Allemagne entre le début de la matinée et la fin de journée du 26 décembre 1999. Son intensité fut exceptionnelle, avec des vents instantanés dépassant 160 km.h^{-1} dans les terres. Cette tempête ainsi que son successeur T2 ou Martin (étudiée dans l'article joint en Chap. 4 se développèrent dans un courant-jet d'intensité hors norme pour l'Atlantique Nord, dont la vitesse maximale de vent atteignit 350 km.h^{-1} au niveau de la tropopause dynamique. Cependant, les mécanismes de développement de ces deux tempêtes sont très différents. Pour T2, une structure d'altitude préexistante vient se phaser avec un noyau de vorticité en basses couches, ce qui induit une croissance rapide de la tempête (Chap. 4). On est ici dans un cas typique d'interaction barocline (Fig. 1.4).

T1 en revanche, ne semble pas suivre un tel mécanisme. Avant le 26 décembre à 00 TU, la tempête identifiée sur la Fig. 3.7 par un noyau de tourbillon relatif à 850 hPa, est advectée sous le courant-jet (marqué par les barbules) sans subir d'amplification rapide. Pendant cette phase de *propagation*, il n'y a pas d'anomalie d'altitude bien marquée qui interagit avec les basses couches. Sur l'image satellite, on repère quelques anomalies d'amplitude faible et de petite taille, qui ne sont pas comparables au précurseur d'altitude de T2 par exemple. Ces anomalies ne jouent pas un rôle important d'amplification de la tempête. À l'approche des côtes (entre 00 TU et 06 TU), la tempête entre dans une phase *explosive*. Une anomalie d'altitude bien marquée apparaît alors, sous la forme d'un assèchement localisé de la masse d'air, laissant croire

à une intrusion stratosphérique (Fig. 3.7). Comme celle-ci n'est pas préexistante, il est plausible qu'elle soit le résultat de l'amplification en basses couches plutôt que son précurseur.

L'ensemble des mécanismes à l'œuvre dans le déclenchement de T1 est une question qui fait encore débat. Wernli et al. (2002) interprètent l'évolution en prenant en compte les processus diabatiques. La phase de propagation de T1 serait similaire à une onde de Rossby diabatique (Parker et Thorpe, 1995), dont le rôle serait de maintenir l'amplitude de la tempête en contrebalançant les frottements. Un tel paquet d'onde se développe sous un courant-jet, grâce à la libération de chaleur latente (Moore et Montgomery, 2004). La phase explosive est plus difficile à expliquer de ce point de vue. Les auteurs mettent en avant l'apparition d'une tour de tourbillon potentiel comme résultat de la condensation de la vapeur d'eau. Une simulation à haute résolution à partir du 25 à 12 TU sans libération de chaleur latente annule complètement la tempête. Cependant, d'autres simulations du modèle ARPÈGE (F. Crépin, G. Rivière – communication personnelle) sans aucun processus diabatique (ni libération de chaleur latente, ni turbulence) montrent une explosion de la tempête T1. Ainsi, la libération de chaleur latente ne serait pas l'explication principale de l'explosion de la tempête. De plus, Wernli et al. (2002) n'expliquent pas le rôle du rapide de jet, dont l'intensité n'est certainement pas étrangère au caractère exceptionnel de T1.

La croissance rapide de T1 s'opère en sortie du courant-jet, qui est connu pour être un lieu propice aux phases explosives, quand l'anomalie croise l'axe du courant-jet (Baehr et al., 1999). Pour analyser le rôle de l'environnement basse-fréquence, Rivière et Joly (2006) montrent la pertinence du diagnostique de déformation effective. La phase explosive de T1 quand elle croise l'axe du courant-jet est liée au passage à cet endroit par un point critique barocline, ce qui génère une croissance rapide de son énergie cinétique. Cette théorie apporte une explication dynamique au rôle du courant-jet basse-fréquence pour le déclenchement de T1.

L'extraction du rapide de jet à un instant et des simulations avec et sans cette structure sont ici proposées. L'objectif est de montrer le rôle de la structure cohérente d'altitude responsable du rapide de jet sur le déclenchement de T1, et donc d'apporter un éclairage sur les mécanismes à l'origine du déclenchement de T1.

Les analyses du champ de tourbillon potentiel avant l'explosion de la tempête (Fig. 3.8) montrent une structure cohérente de grande échelle qui évolue lentement, située à l'endroit du maximum d'intensité du vent. L'extraction en ondelettes est appliquée sur le champ de tourbillon potentiel sur des niveaux isobares. Une seule date est considérée, le 25 décembre à 18 TU, soit environ 12 h avant l'explosion de la tempête. La structure est détectée et extraite entre les niveaux 275 et 600 hPa. La Fig. 3.9 illustre son extraction au niveau 300 hPa.

La suppression de la structure a pour effet de relâcher le gradient de tourbillon potentiel à l'emplacement de la structure. Un artefact de la méthode semble néanmoins apparaître au Sud du rapide de jet (bas de la Fig. 3.9) : un pôle de tourbillon potentiel positif apparaît dans une région où le champ était quasiment nul. Cela semble être dû à un pôle de tourbillon potentiel négatif qui est extrait au Sud du pôle positif de la structure **R**. De futures améliorations de l'algorithme d'extraction (voir la section 2.3) devraient permettre de traiter plus correctement ce type de structure anisotrope. Il demeure néanmoins que le noyau principal de la structure est extrait par l'algorithme.

L'inversion du tourbillon potentiel (Arbogast et al., 2008) permet ensuite de déduire de la distribution avec et sans structure son impact sur l'intensité et la forme du courant-jet (Figs. 3.10

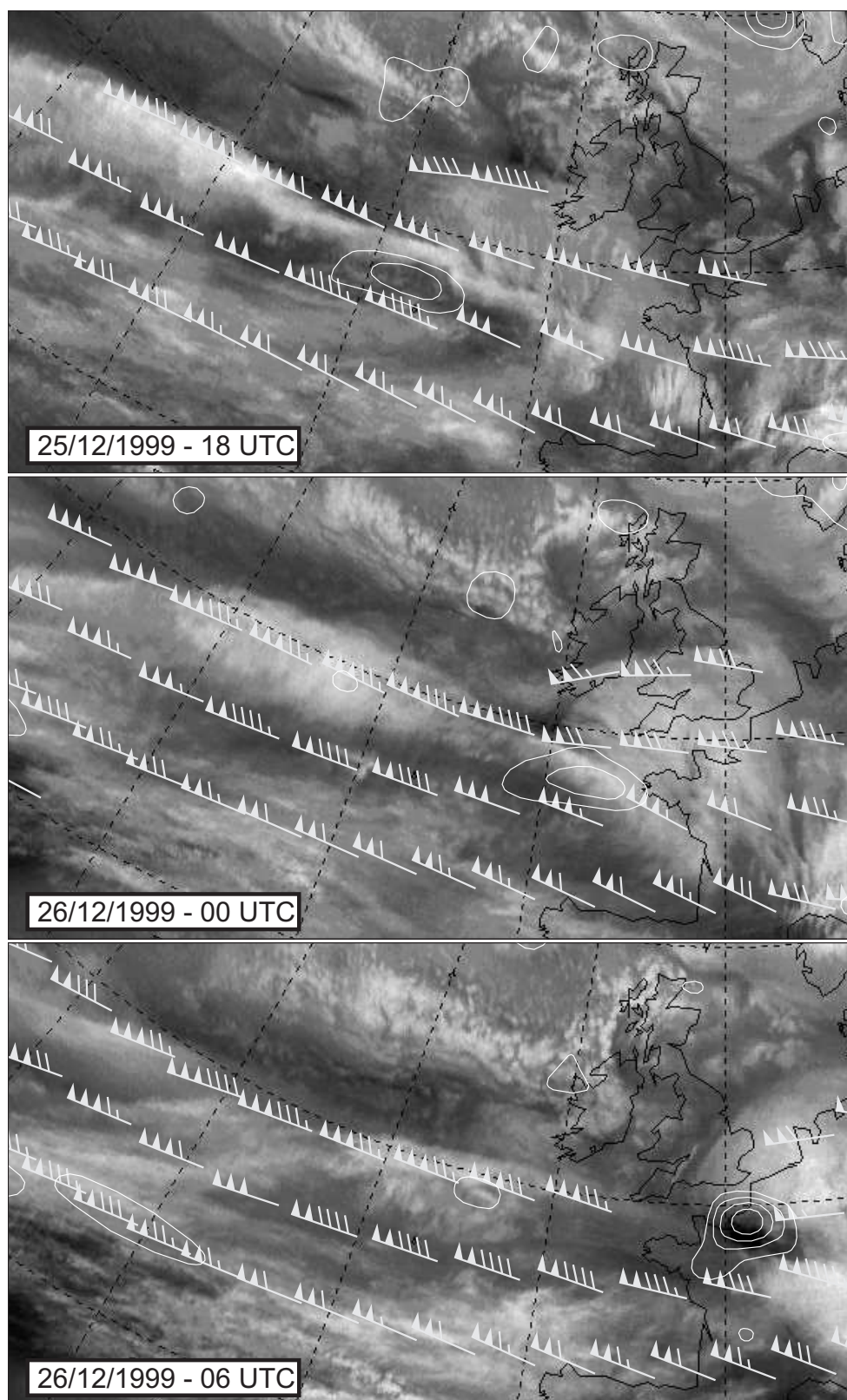


FIG. 3.7: Évolution de l'image satellite (Meteosat, canal vapeur d'eau), du vent au niveau 1,5 pvu (barbules) et du tourbillon relatif au niveau 850 hPa (isolignes positives en blanc, intervalle 10^{-4} s^{-1}), du 25 à 18 TU au 26 décembre 1999 à 06 TU. Sur l'image satellite, une anomalie d'altitude se traduit par une zone sèche, donc sombre.

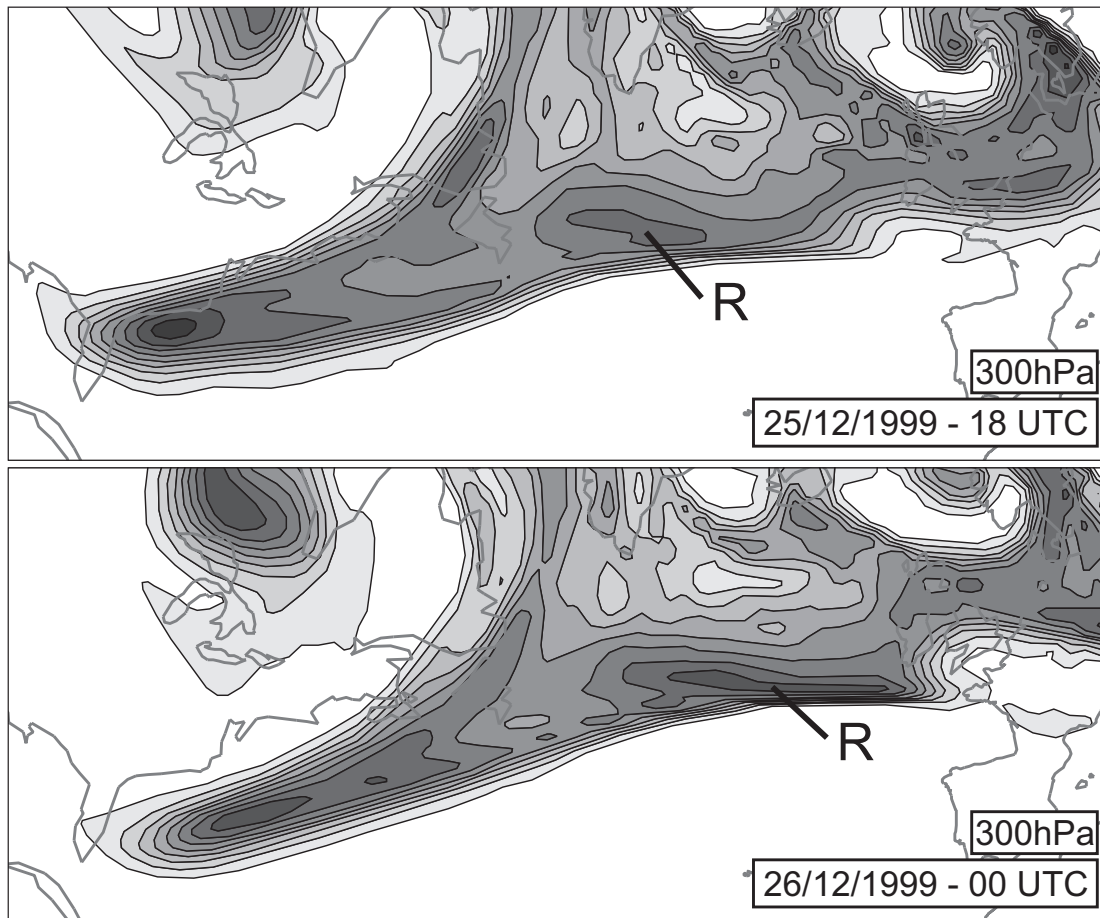


FIG. 3.8: Tourbillon potentiel (intervalle 1 p.u.) sur le niveau 300 hPa le 25 décembre à 18 TU (en haut) et le 26 décembre à 00 TU (en bas). La structure cohérente liée au rapide de jet est indiquée par **R**.

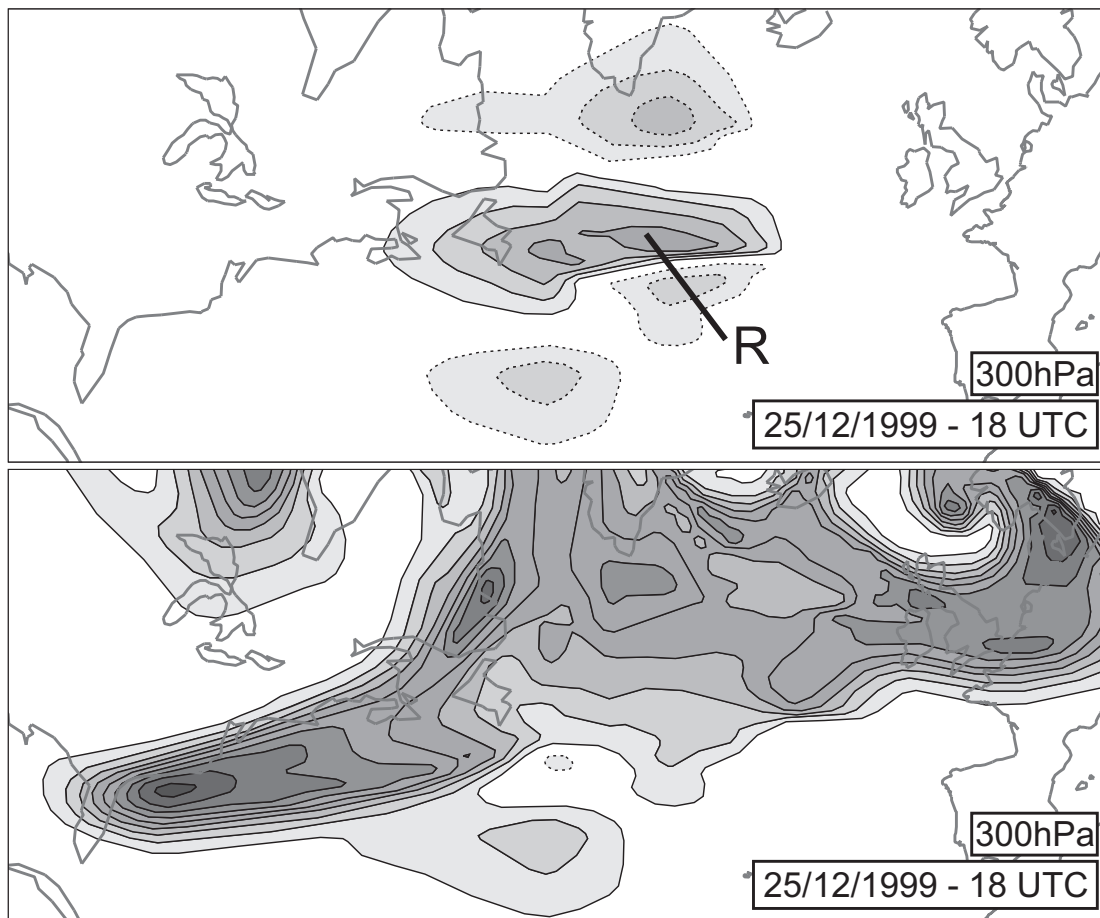


FIG. 3.9: Extraction de la structure associée au rapide de jet le 25 décembre à 18 TU sur le niveau 300 hPa par la méthode ondelette. La structure extraite (en haut) est retirée du champ initial (Fig. 3.8). Le champ après suppression de la structure est en bas. Les isolignes positives sont en trait plein, les négatives en pointillé. Intervalle : 1 pvu.

et 3.11). La suppression de la structure affaiblit fortement le courant-jet en son centre, puisque le vent maximal au niveau 300 hPa passe de 108 m.s^{-1} à 90 m.s^{-1} . Cependant, cela reste un courant-jet de forte intensité. La forme du courant-jet demeure sensiblement inchangée près de sa sortie, alors que son entrée et son centre sont déformés. Cela confirme la contribution locale de la structure cohérente d'altitude dans le courant-jet.

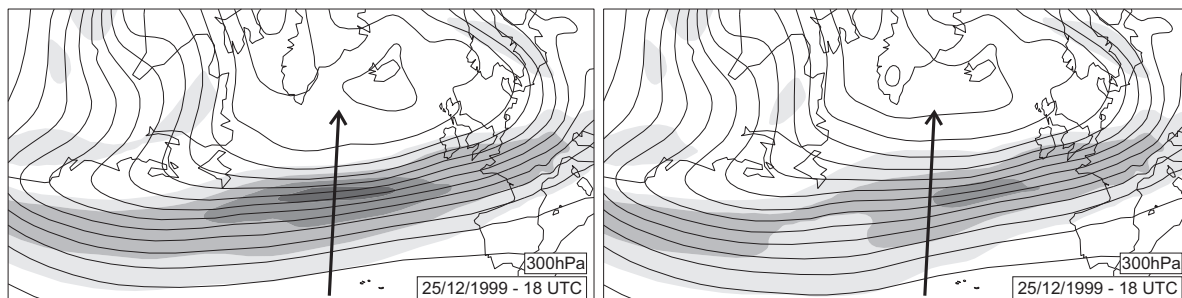


FIG. 3.10: Module du vent (isolignes à partir de 40 m.s^{-1} , intervalle 20 m.s^{-1}) et géopotentiel (intervalle 10^3 mgp) au niveau 300 hPa le 25 décembre à 18 TU, initialement (à gauche) et après extraction de la structure (à droite). La flèche indique la ligne de coupe de la Fig. 3.10.

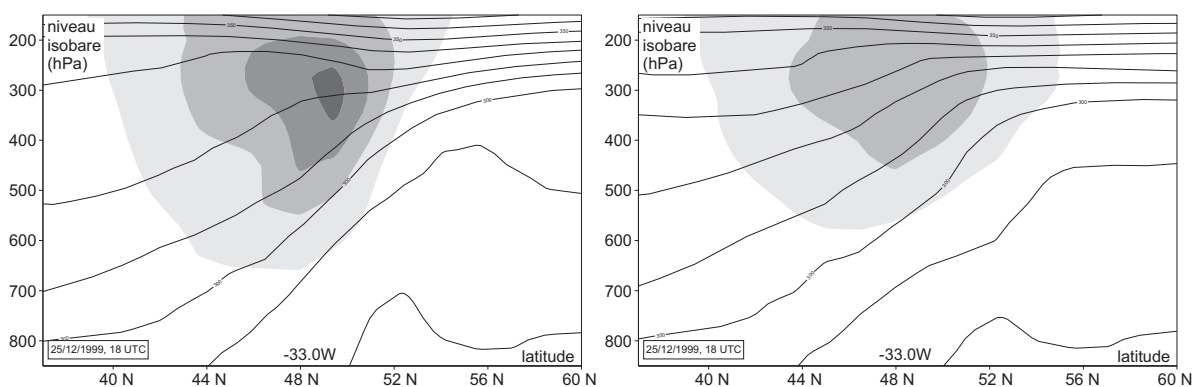


FIG. 3.11: Coupe verticales du module du vent (mêmes isolignes que la fig. 3.10) et de la température potentielle (intervalle 10 K) le long de la ligne de coupe indiquée par une flèche sur la Fig. 3.10. Avant extraction à gauche, après extraction à droite.

3.2.3 Rôle du rapide de jet sur le déclenchement de la tempête

Partant des états initiaux obtenus par inversion du tourbillon potentiel, après et avant suppression de la structure associée au rapide de jet le 25 décembre à 18 TU, deux simulations avec le modèle ARPÈGE sont effectuées. La condition à la limite en basses couches stipulée pour l'inversion du tourbillon potentiel est la température inchangée au niveau 850 hPa. Ainsi, le noyau de vorticité initiale en basses couches est préservé dans les deux simulations. Le modèle fonctionne en résolution T358C2.4, avec toutes ses paramétrisations physiques. Les résultats des simulations sont montrés sur la Fig. 3.12.

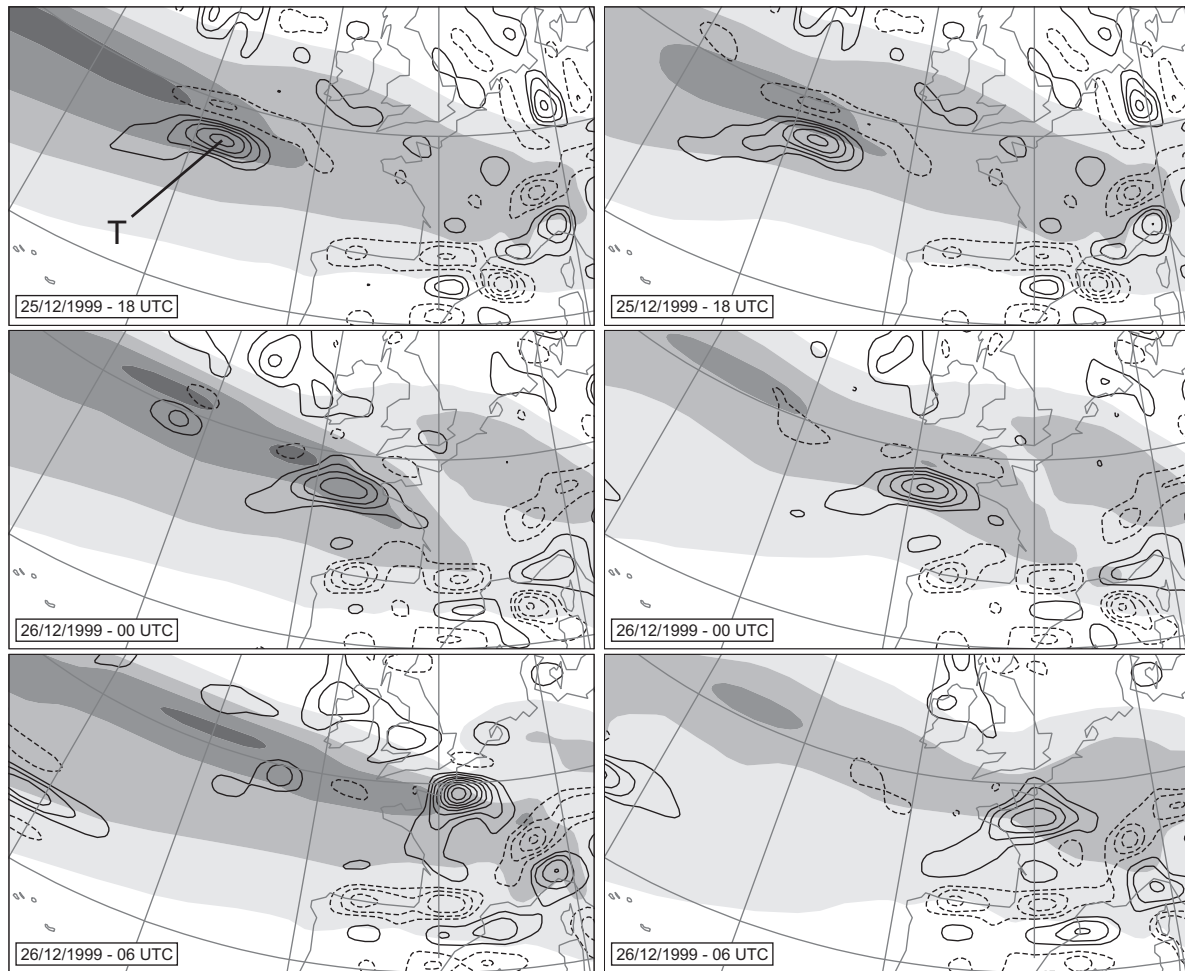


FIG. 3.12: Module du vent au niveau 300 hPa (même légende que la Fig. 3.10) et tourbillon relatif à 850 hPa (intervalle $5 \cdot 10^{-5} \text{ s}^{-1}$, cyclonique en trait plein, anticyclonique en pointillés) entre le 25 décembre à 18 TU et le 26 décembre à 06 TU, prévus par deux simulations partant du 25 décembre à 18 TU. À gauche, on voit la simulation sans modification du tourbillon potentiel initial (contrôle) et à droite, la simulation après avoir retiré le rapide de jet. Le noyau de tourbillon associé à la tempête est indiqué par T initialement.

Dans la phase de propagation (jusqu'au 26 à 00 TU), la suppression du rapide de jet n'a pas d'effet négatif sur la tempête. Au contraire, la tempête est même plus intense dans la simulation sans rapide de jet le 26 à 00 TU. Le rapide de jet ne semble donc pas avoir un impact très important sur la phase de propagation avant explosion. Ce résultat est cohérent avec l'explication par onde de Rossby diabatique puisque, selon ce mécanisme, la force du courant-jet n'est pas essentielle pour la croissance du paquet d'ondes en basses couches.

En revanche, la phase explosive qui est bien reproduite dans la simulation de contrôle est complètement absente de la simulation sans rapide de jet. La tempête en basses couches ne traverse pas l'axe du courant-jet : elle continue sa trajectoire au Sud du jet. Dans cette simulation, la sortie de courant-jet n'est plus située à l'endroit où est la tempête à cet instant. De plus, la force du courant-jet est moindre que dans le contrôle. Ces deux éléments peuvent expliquer le maintien de la tempête au Sud au lieu de son explosion.

On pourrait objecter que beaucoup de structures ont été retirées de l'altitude, et donc éventuellement aussi des structures haute-fréquence et de petite échelle spatiale qui pourraient venir interagir avec les basses couches. Des expériences récentes (F. Crépin, G. Rivière – communication personnelle) montrent que le fait de retirer le seul champ de haute-fréquence en altitude ne modifie pas la trajectoire de la tempête en basses couches, ni sa croissance. Par conséquent, c'est bien le rapide de courant-jet, soit la structure cohérente lente qui a été extraite par les ondelettes, qui joue un rôle sur la phase explosive de la tempête.

Il est important de noter que, bien qu'initialement la sortie du courant-jet soit la même avec ou sans structure cohérente du rapide de jet, elle est fortement modifiée dans les deux simulations. La structure extraite a donc un impact sur la sortie de jet.

Ainsi, les résultats de cette simple expérience suggère que la structure cohérente extraite en altitude joue un rôle important pour l'explosion de la tempête, et uniquement dans cette phase. Il faudrait poursuivre cette étude plus loin pour identifier clairement les mécanismes en jeu dans l'interaction entre cette structure et le noyau en basses couches. Les champs de déformation associés pourraient être calculés et les interactions énergétiques analysées. Extraire la structure cohérente associée au rapide de jet et faire tourner des simulations à d'autres instants permettrait de valider les premiers résultats montrés ici. Il serait aussi intéressant de suivre la structure cohérente du rapide jusqu'à son origine, afin de déterminer ses mécanismes de formation. Ces structures peuvent en effet se propager autour du globe pendant plusieurs semaines (Pyle et al., 2004).

Il faudrait aussi mettre en évidence les différences entre un précurseur d'altitude tourbillonnaire haute-fréquence (comme vu pour T2) et un rapide de jet. On a en effet montré que dans le cas de T2 (voir Chap. 4), la structure cohérente en altitude joue aussi un rôle d'amplification locale de la baroclinie. Ne sont-ce finalement pas un même objet dynamique ? Comparer les mécanismes à l'œuvre dans les deux cas permettrait de répondre à cette question.

3.3 Composites de structures à l'origine d'épisodes pluvieux Méditerranéens

3.3.1 Les cas d'étude

Les épisodes de précipitation intense sur le pourtour du Golfe du Lion se déclenchent quand un flux originaire de la mer Méditerranée (donc orienté du Sud à l'Est) est contré par les reliefs entourant la plaine côtière (Doswell et al., 1998; Ricard, 2002; Ducrocq et al., 2002, 2008). Ce qui rend ces événements spécialement dangereux est le caractère stationnaire des précipitations, ce qui occasionne un gonflement subit des petits cours d'eau. Bien qu'il y ait souvent une circulation cyclonique au voisinage de ces épisodes (Jansà et al., 2001), il semblerait que ce ne soit pas le facteur le plus déterminant pour leur dynamique. Néanmoins, l'examen de plusieurs cas d'épisodes cévenoles montrent qu'ils sont souvent liés à une anomalie d'altitude de tourbillon potentiel qui évolue lentement au voisinage de la zone de précipitations (Nuissier et al., 2008). De façon similaire à certains cas de précipitation intense sur les Alpes (Massacand et al., 1998; Fehlmann et al., 2000), une structure d'altitude contribue à l'organisation de la convection en contraignant le flux de basses couches et en créant de la divergence d'altitude. Le but de cette section est de documenter la climatologie des structures d'altitude associées à ces épisodes Méditerranéens, à l'aide de l'extraction automatique des structures cohérentes.

Le champ de tourbillon potentiel est issu de la réanalyse ERA40, qui couvre la période 1958-2001. La sélection des épisodes de pluie intense pendant cette période a été faite par B. Joly et O. Nuissier à partir des mesures brutes de précipitations issues d'un ensemble de stations du réseau de Météo-France (Joly et al., 2007), sur le pourtour et le relief Méditerranéen français. Un épisode est considéré comme extrême si au moins 2 stations dépassent leur quantile 99,9% sur une journée.

On obtient ainsi 140 épisodes intenses sur toute la période ERA40. Pour chaque épisode, on considère le champ de tourbillon potentiel sur la surface isentrope 330 K, le jour du maximum de précipitation de l'épisode, à 12 TU. La moyenne de ces champs (Fig. 3.13) met en évidence une structure d'altitude située sur le Golfe de Gascogne.

3.3.2 Densité et composites des structures

L'algorithme d'extraction doit permettre de caractériser les structures cohérentes de façon plus précise que le composite de la Fig. 3.13, pour lequel la moyenne lisse le champ. On fait donc tourner l'extraction en ondelettes sur les 140 champs de tourbillon potentiel à 330 K. L'algorithme est défini dans sa version complète, c'est-à-dire que les structures extraites le même jour sont orthogonales.

Des cartes de densité des structures extraites sont calculées pour les 140 cas (Fig. 3.14). La technique employée est la suivante. Pour chaque structure extraite, l'algorithme d'extraction donne le centre de la structure et toutes les valeurs du champ de la structure. On choisit de définir l'étendue spatiale de la structure comme étant l'ensemble des points de grille qui ont une valeur supérieure à la moitié de l'amplitude de la structure en son centre, qui est son maximum. Ainsi, on

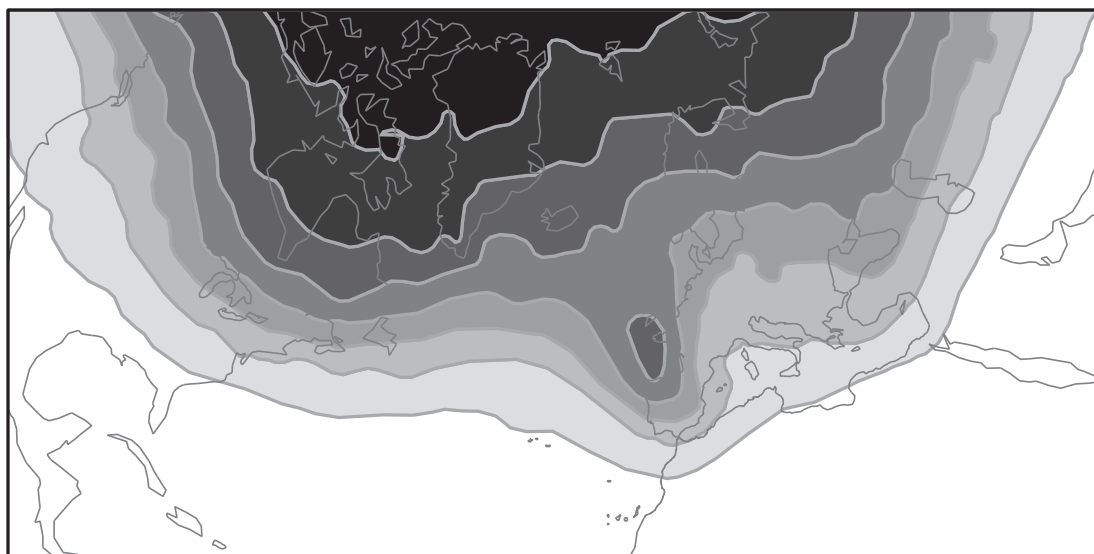


FIG. 3.13: *Champ composite du tourbillon potentiel à 330 K sur les 140 jours de pluie intense (intervalle : 1 pvu).*

repère le noyau central de la structure, à l'intérieur duquel on donne la valeur 1, et 0 à l'extérieur. La carte de densité est obtenue en ajoutant les noyaux centraux de toutes les structures extraites sur les 140 cas. Le résultat est ensuite divisé par le nombre de cas (soit 140) pour le normaliser et obtenir le nombre de structures par cas.

Afin de lisser le champ de densité pour qu'il soit mieux interprétable, un filtrage non linéaire en ondelette peut lui être appliqué. On délimite ainsi (Fig. 3.14, panneau du bas) une zone de forte population de structures sur l'Ouest de l'Europe, et de faible population sur l'Europe Centrale. Ce comportement peut s'interpréter en terme de train d'onde de Rossby. Les ondes qui circulent zonalement vers l'Est sont ici majoritairement phasées telles qu'il y a un *thalweg* sur le Golfe de Gascogne. Ainsi, on repère des structures dans cette zone, mais très peu dans la région en aval puisqu'on a plutôt ici une dorsale.

L'étape suivante est d'utiliser l'algorithme d'extraction afin d'établir des composites de structures associés aux épisodes précipitants. Pour être certain de conserver les structures pertinentes, on s'intéresse uniquement aux structures de la région délimitée sur la carte de densité de la Fig. 3.14.

Parmi les 140 cas, 132 ont une structure dans la région d'intérêt. Le composite de toutes les structures détectées est présenté sur la Fig. 3.15. À chaque date, il peut y avoir une ou plusieurs structures détectées. On considère que la structure associée à un cas est l'agglomération des structures orthogonales extraites dans la région de sélection à cette date. Cela a pour résultat une structure de taille maximale, ce qui permet de limiter les défaillances de l'algorithme dans l'extraction des structures filamenteuses. Le centre de l'agglomérat est déterminé comme étant son centre de gravité, pondéré par le carré des valeurs du champ de la structure. Le composite est obtenu en moyennant tous les agglomérats dont le centre est translaté en la moyenne de leur centre de gravité. On évite ainsi de lisser trop les gradients, comme cela apparaît sur la moyenne

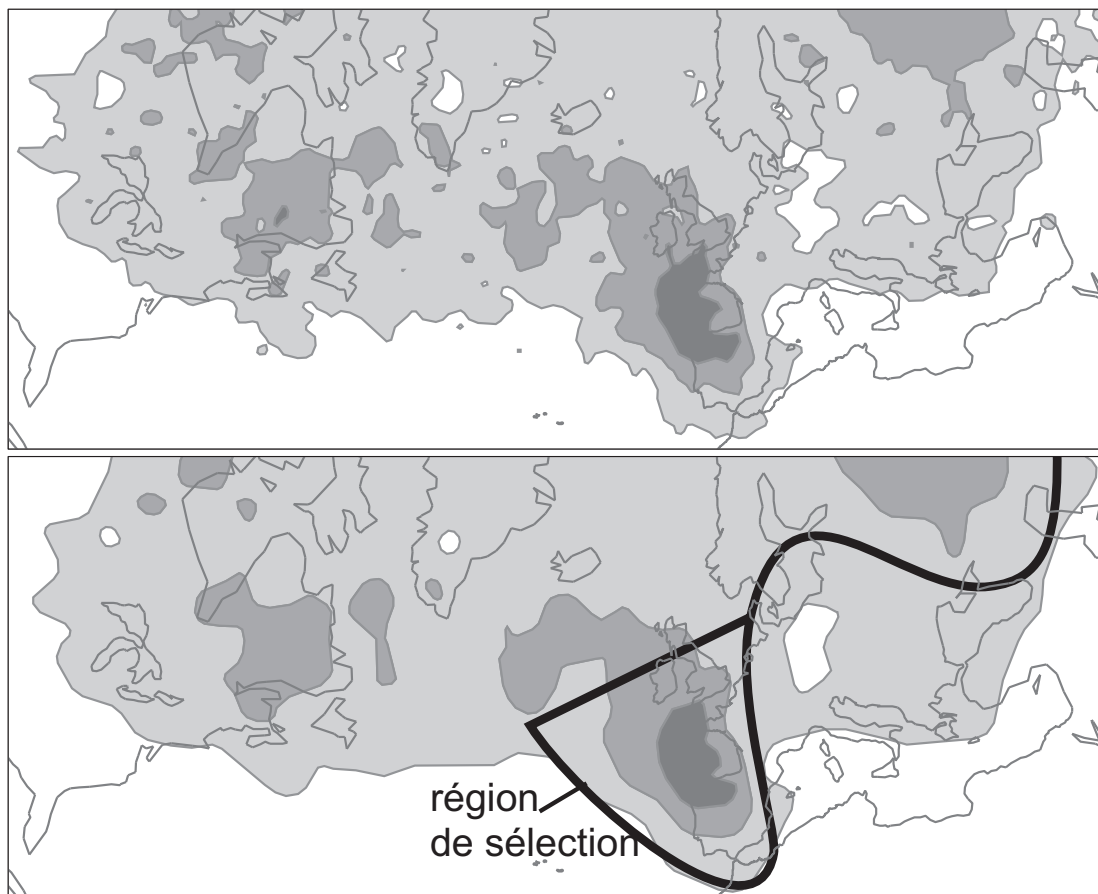


FIG. 3.14: Carte de densité brute (en haut) des structures extraites par l'algorithme. Le champ tracé est le nombre de structures par jour. Intervalle des isolignes : 0,1 structure/jour. Le filtrage non linéaire en ondelettes de ce champ donne une carte de densité lissée (en bas, même intervalle d'isolignes qu'en haut) d'où ressortent les régions riches et pauvres en structures détectées. Un train d'onde de Rossby est visible sur le panneau du bas, et une région dense en structures est repérée sur l'Ouest de l'Europe.

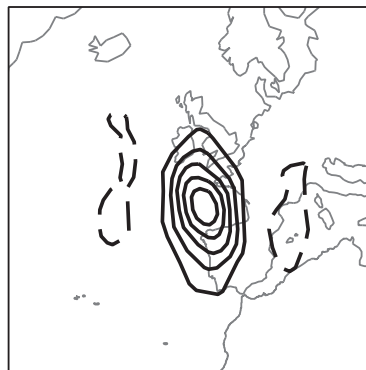


FIG. 3.15: Composite des 132 structures extraites (intervalle 0.5 pvu, isolignes positives en trait plein, négatives en pointillé).

des champs (Fig. 3.13).

La structure composite (Fig. 3.15) montre un tripole aligné zonalement. Son amplitude est de l'ordre de 2,5 pvu. On reconnaît une structure anisotrope, étirée dans la direction Nord-Sud dont la forme semble évoquer un déferlement du paquet d'ondes de Rossby.

3.3.3 Analyse des structures par classe d'événement

Joly et al. (2007) ont mis en évidence des classes particulières de l'environnement d'échelle synoptique associé à ces événements précipitants. Ils ont classé par un algorithme automatique le géopotentiel à 500 hPa d'un ensemble d'épisodes précipitants. Pour avoir une bonne significativité statistique, l'échantillon classé est choisi de taille plus grande que les 140 cas extrêmes précédents, en prenant les jours où au moins 2 stations dépassent leur quantile 97%. Il résulte de la classification automatique 4 classes. 3 d'entre elles sont bien représentées parmi les 140 cas extrêmes. Leur nombre par classe est 66 pour la classe 1, 26 pour la classe 2 et 44 pour la classe 3.

Joly et al. (2007) montrent que les 3 classes obtenues correspondent à des dynamiques différentes. Les composites par classe du géopotentiel au niveau isobare 500 hPa des 140 événements extrêmes (Fig. 3.16) montrent en effet des circulations d'échelle synoptique contrastées. La classe 1 est caractérisée par d'un thalweg de grande échelle placé selon un axe Islande-Gibraltar. Le composite de la classe 2 est un *cut-off* bien marqué. La classe 3 est aussi caractérisée par un *cut-off*, moins prononcé, mais sa particularité est la dorsale située en aval, sur l'Europe Centrale. Ces trois configurations induisent des flux de basses couches différents qui ont un impact sur la localisation des précipitations. Alors que les classes 1 et 2 sont majoritairement associées à des pluies sur le pourtour des Cévennes (flux de Sud-Ouest à Sud), la classe 3 est favorable aux pluies sur l'Aude et la Catalogne (flux de Sud-Est).

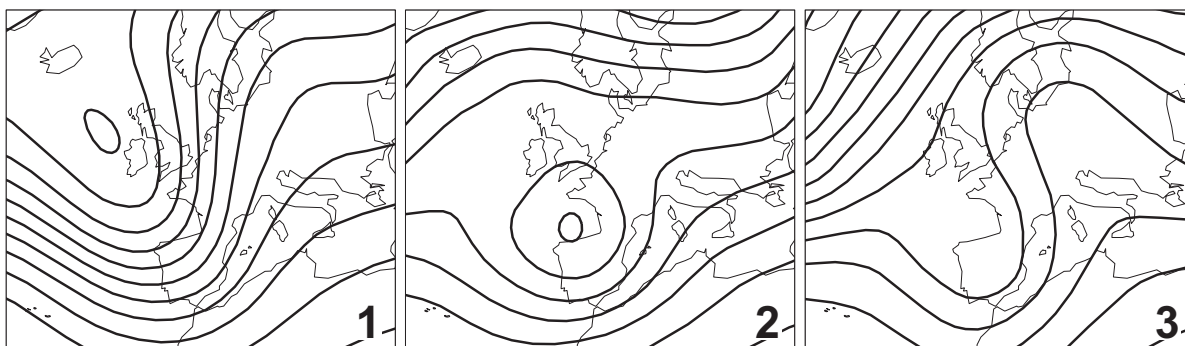


FIG. 3.16: Composites du géopotentiel à 500 hPa (intervalle des isolignes : 50 mgp), pour les trois classes 1 (à gauche), 2 (au centre) et 3 (à droite). Sources fournies par B. Joly et O. Nuissier.

L'examen des structures cohérentes d'altitude, grâce à l'outil d'extraction appliqué aux structures cohérentes de chaque classe, doit permettre d'interpréter ces résultats sous un nouvel angle. Les cartes de densité par classe (Fig. 3.17) montrent un comportement cohérent avec les composites de géopotentiel (Fig. 3.16). Sur la classe 1, on repère une densité caractéristique d'un

déferlement d'ondes de Rossby, qui est cohérent avec le thalweg montré en géopotentiel. Le *cut-off* de la classe 2 s'explique aussi par une petite région à haute densité de structures, centrée sur le Golfe de Gascogne. Dans la classe 3, les structures semblent être moins nombreuses que dans les autres classes, et davantage réparties sur le domaine. De plus, la faible densité de structures à l'aplomb de l'Europe Centrale est cohérent avec la dorsale mise en évidence sur le géopotentiel.

Les composites de structures pour les 3 classes sont présentés sur la Fig. 3.18. On retrouve encore des caractéristiques semblables à celles évoquées plus haut. Le composite 1 est à rapprocher du composite total, en plus fort et plus allongé, qui suggère un déferlement du paquet d'onde. À l'inverse, le composite 2 est plutôt isotrope, ce qui suggère plutôt une structure isolée. Le composite 3, qui semble être de même nature que le composite 1, est cependant incliné différemment, ce qui pourrait expliquer l'orientation différente du flux de basses couches. Cette confrontation avec les composites de géopotentiel confirme le bon comportement de l'algorithme d'extraction.

En perspective de cette première application de l'algorithme d'extraction aux épisodes précipitants Méditerranéens, on pourrait dire que l'extraction des structures cohérentes d'altitude permettrait d'interpréter sous un nouvel angle la dynamique de ces épisodes. En utilisant l'inversion du tourbillon potentiel, on pourrait décrire complètement les situations propices à ce type d'événement. Il serait aussi intéressant d'étudier plus en détail la dynamique de la formation des structures cohérentes donnant lieu à ce type d'événement.

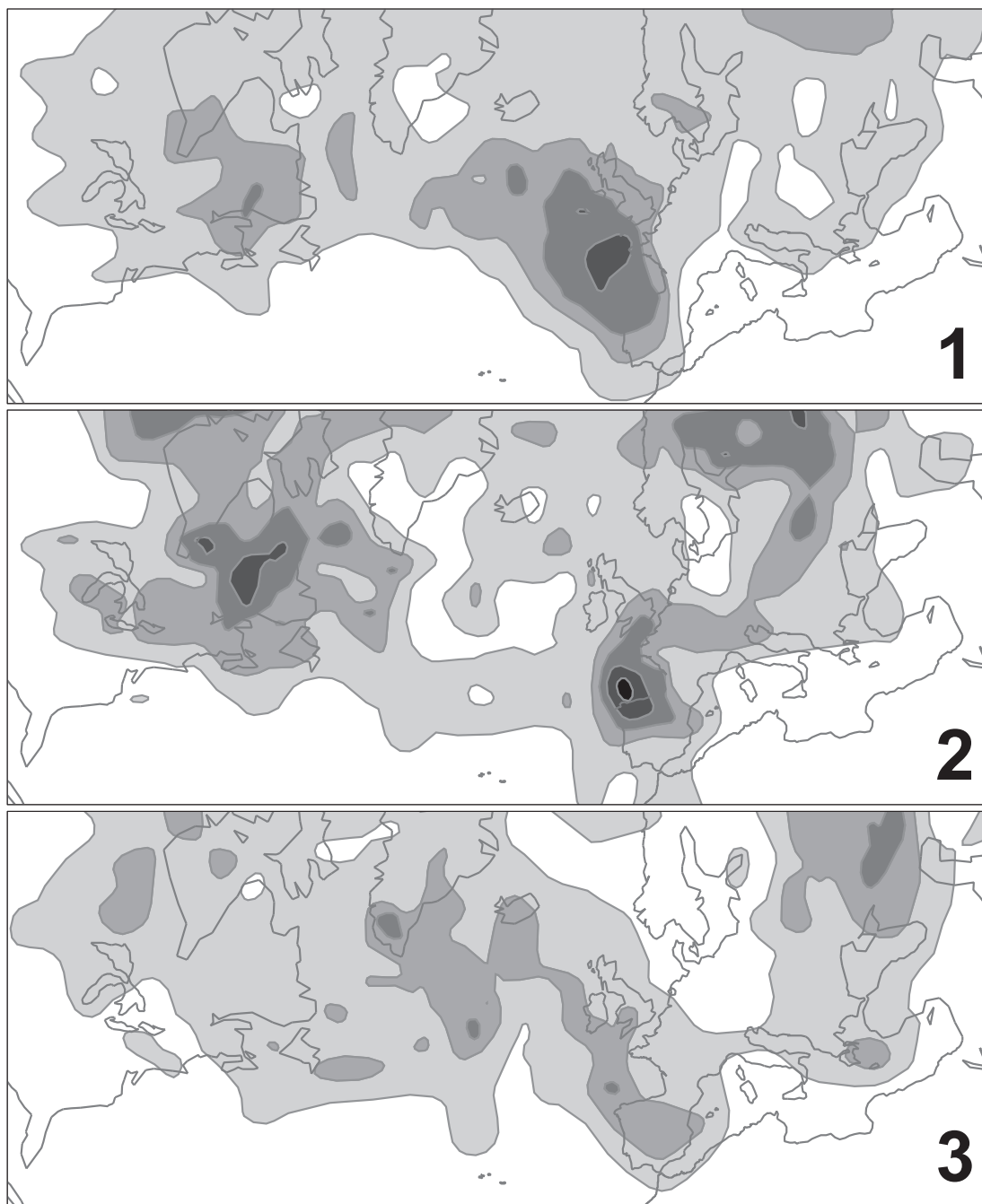


FIG. 3.17: Cartes de densité (calculées selon la même méthode que pour la Fig. 3.14, après filtrage non linéaire) des structures cohérentes sur le niveau 330 K, pour les événements précipitants extrêmes appartenant aux classes 1 (en haut), 2 (au milieu) et 3 (en bas). Pour chaque classe, la densité est normalisée par le nombre de jours extrêmes appartenant à la classe. Isoligne : 0,1 structure/jour.

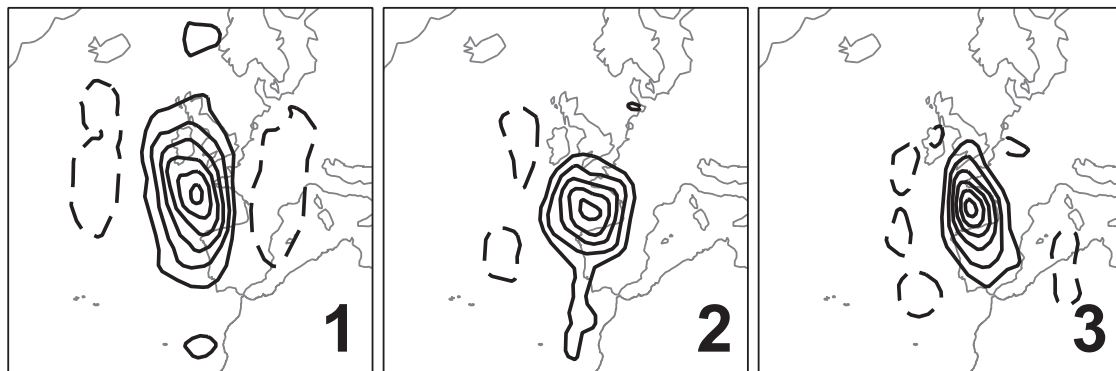


FIG. 3.18: Composite des structures extraites pour les classes 1, 2 et 3, respectivement. Intervalle 0.5 pvu, isolignes positives en trait plein, négatives en pointillé.

Chapitre 4

Article : *A wavelet representation of synoptic-scale coherent structures*

Auteurs : M. Plu, P. Arbogast et A. Joly.

L'article qui suit a été accepté pour publication dans le *Journal of the Atmospheric Sciences*.

La première partie reprend la présentation de l'algorithme du Chap. 2, sans traiter l'orthogonalisation. Le filtrage non linéaire, la détection de l'échelle par les coefficients diagonaux et reconstruction par le cylindre d'influence sont présentés de façon plus concise.

La deuxième partie s'intéresse à l'extraction du précurseur d'altitude de la tempête Martin (T2) de Noël 1999. La structure est extraite en altitude sur un ensemble de niveaux isobares, à trois instants consécutifs. Grâce à l'inversion du tourbillon potentiel avec condition d'équilibre implicite (Arbogast et al., 2008), on peut attribuer les champs dynamiques à cette structure et à son environnement. On montre que la structure extraite joue un rôle d'accélération du vent dans le courant-jet. De plus, l'évolution de sa forme est cohérente avec le champ de déformation de son environnement.

Des simulations numériques à équations primitives sont ensuite effectuées afin de voir l'impact de la structure sur la tempête en basses couches. Comme prévu, la suppression du précurseur extrait conduit à l'annulation du développement de la tempête, ce qui montre que l'algorithme extrait la bonne structure. Le critère de cohérence, défini dans la section 3.1.2, est appliqué au précurseur extrait et à une anomalie définie par filtrage temporel. Il confirme ainsi dans le cadre d'un modèle à équations primitives la meilleure cohérence de l'anomalie ondelette par rapport à la technique de filtrage temporel.

Perspectives : structures cohérentes et prévisibilité

L'extraction des structures cohérentes offre aussi de nouveaux moyens de traiter la prévision d'ensemble et l'assimilation d'images. Ce chapitre propose des idées et des expériences préliminaires montrant son utilisation.

5.1 Prévision d'ensemble

Les limites de l'explication de la croissance d'erreur par instabilité commencent à être abordées dans la littérature (voir la section 1.4.2). Or, les modes de croissance d'erreur conditionnent les techniques employées pour générer une prévision d'ensemble, puisqu'il s'agit d'avoir un ensemble de taille réduite qui aille dans les directions favorables du système.

Après la présentation d'un article qui teste différents types de prévision d'ensemble dans un cas où la croissance d'erreur s'explique par la mauvaise position d'une anomalie, on présentera l'initialisation d'une prévision d'ensemble par perturbation d'une structure cohérente initiale pour une cyclogenèse réelle.

5.1.1 Article publié : *A cyclogenesis evolving into two distinct scenarios and its implications for short-term ensemble forecasting*

Auteurs : M. Plu et P. Arbogast.

L'article qui suit a été publié en août 2005 dans le journal *Monthly Weather Review*. L'étude est faite dans le modèle quasi-géostrophique à tourbillon potentiel uniforme. Le vecteur d'état se réduit à la température sur deux surfaces isobares, où la vitesse verticale s'annule : le sol et la tropopause. Un courant-jet forme l'environnement instable, sur lequel sont superposés deux anomalies d'amplitude finies confinées spatialement, l'une froide à la tropopause et l'autre chaude au sol. En fonction de leur inter-distance le long du jet (la pente verticale, *tilt* en anglais), les deux anomalies vont interagir avec plus ou moins d'intensité, donnant lieu à une cyclogenèse au sol plus ou moins forte. Il existe une valeur-seuil de la pente verticale initiale telle que, en deçà l'interaction est constructive, et au-delà, elle est destructive (Malardel, 2005). L'article considère deux situations initiales, très proches en terme de différence des champs, mais telles que la pente verticale soit de part et d'autre de cette valeur-seuil. Conformément à ce qui est attendu, les deux

situations suivent des évolutions distinctes, validées par l'examen de la vitesse verticale et par l'existence de structures tourbillonnaires très différentes à l'état final.

On rompt la symétrie du problème en prenant comme scénario de base une des deux situations, et qu'on suppose que l'autre situation est un scénario alternatif possible, puisque sa différence initiale avec le scénario de base est faible. La différence entre les deux scénarios est donc un champ d'erreur, faible initialement et qui croît fortement au cours du temps. La situation est ainsi similaire aux cas présentés par Snyder (1999), où l'erreur est une erreur de phase, au sens étendu de *position*, entre les structures cohérentes de l'écoulement.

La capacité de la prévision d'ensemble à prévoir l'évolution des deux scénarios, à partir d'un unique état initial, est évaluée dans la suite de l'article. Un ensemble de Monte Carlo, dont la variabilité initiale est contrainte en échelle, sert de référence, à laquelle plusieurs méthodes d'initialisation d'ensemble sont comparées. Trois ensembles à base de vecteurs singuliers sont calculés, l'un classique, à norme euclidienne, sans contrainte particulière, et deux autres, qui sont contraints initialement par la distribution de probabilité de l'ensemble de Monte Carlo, et calculés pour deux normes, euclidienne et énergie totale. Un nouveau type d'ensemble est aussi proposé, susceptible de rendre compte de la croissance d'erreur sur la position et l'amplitude des structures cohérentes, qui consiste à perturber les structures cohérentes initiales en les translatant le long du courant-jet et les amplifiant.

L'ensemble de Monte Carlo reproduit effectivement la bimodalité des scénarios. Les autres ensembles, de taille opérationnelle, sont évalués par leur capacité à rendre compte d'une telle distribution bimodale avec un petit échantillon. Pour l'ensemble formé par les vecteurs singuliers non contraints initialement, le second scénario n'est pas représenté, au contraire des deux ensembles contraints initialement. Néanmoins, l'ensemble qui donne la distribution finale la plus proche de la référence est l'ensemble obtenu par perturbation des structures cohérentes initiales.

La fin de l'article s'intéresse au mécanisme de croissance d'erreur du scénario, en tâchant d'expliquer pourquoi l'ensemble de vecteurs singuliers non contraint ne parvient pas à reproduire le scénario secondaire. La projection du champ d'erreur sur les vecteurs singuliers initialement montre qu'un vecteur singulier prédomine fortement, et que l'évolution non linéaire de ce vecteur ajouté au scénario de contrôle est très proche du scénario secondaire. Par conséquent, l'échec de l'ensemble de vecteurs singuliers non contraints initialement serait plutôt dû au fait qu'il n'échantillonne pas correctement la distribution de l'incertitude associée à la tempête, plutôt qu'au mécanisme non linéaire de croissance d'erreur. L'évolution non linéaire permet en effet de reproduire la dynamique des structures cohérentes, mais pour un seul vecteur singulier. On peut interpréter ce comportement en disant que la majorité des vecteurs singuliers échantillonne d'autres croissances d'erreur que celles associées à la tempête.

5.1.2 Une contribution à la prévision d'ensemble des événements intenses d'échelle synoptique

L'étude de la sensibilité de la prévision d'une tempête aux caractéristiques d'une anomalie d'altitude va être abordée. Il s'agit d'une première contribution à ce qui pourrait devenir un système de prévision d'ensemble des tempêtes à courte échéance. Il est d'abord important de situer le cadre théorique et opérationnel de l'utilisation d'une telle prévision d'ensemble.

Objectifs de la prévision d'ensemble à courte échéance

En situation propice au développement d'une tempête, il est souvent difficile de prévoir si un tel phénomène se déclenchera, et le cas échéant, son intensité et sa trajectoire. Cette faiblesse de la prévision numérique est valable jusqu'à des échéances courtes, inférieures à 48 h. En 1999, le caractère exceptionnel de la tempête du 26 décembre n'a été vu par la plupart des modèles numériques que 6 heures avant son déclenchement sur la France. Parfois même, ce type de phénomène peut être anticipé de plusieurs jours en avance, et atténué à courte échéance. Quand on sait les dégâts qu'elle a causés, on ne peut que regretter le court délai de prévoyance et chercher un moyen de le réduire. Un service météorologique public est en effet régulièrement évalué sur sa capacité à prévoir ce type d'événement à fort impact humain, sociétal et économique.

À part les erreurs de modélisation, la raison principale de la qualité incertaine de la prévision des événements intenses est la forte sensibilité de la prévision aux conditions initiales dans ce type d'écoulement. Ainsi, deux états initiaux très proches peuvent donner des scénarios très différents après quelques heures de prévision. Comme l'analyse, état initial de la prévision déterministe, est nécessairement entachée d'une erreur par rapport à la « vérité », la prévision déterministe n'est qu'un scénario possible, souvent différent de l'évolution réelle future du système.

Dans de telles situations, la grande incertitude de la prévision peut être mieux évaluée en regardant plusieurs scénarios possibles. La façon la plus simple est d'utiliser les sorties de différents modèles numériques (Ziehmann, 2000), qui permettent de voir la sensibilité aux conditions initiales et au modèle (approche multi-modèle). La grande incertitude de la prévision peut aussi être vue par l'hétérogénéité des simulations d'un réseau à l'autre. On fait ainsi appel à un ensemble de prévisions, nécessairement de taille réduite, qui permet d'apprécier l'incertitude en regardant un certain nombre de solutions possibles.

Ce type d'approche est cependant moins satisfaisant, au sens d'une validation probabiliste, qu'une prévision d'ensemble obtenue par perturbation d'une même analyse. Depuis le début des années 1990, il existe de tels systèmes opérationnels, comme par exemple au CEPMMT (Molteni et al., 1996), et au NCEP¹ (Toth et Kalnay, 1993). Ces systèmes ont initialement été conçus pour étendre la limite de la prévision à 15 jours, en permettant la prévision des configurations de grande échelle les plus probables. Pour la prévision à courte échéance, MÉTÉO-FRANCE dispose depuis 2000 d'une prévision d'ensemble à 10 membres, nommée PEARP. À l'analyse sont ajoutées des perturbations obtenues par combinaison linéaire de vecteurs singuliers. Il n'y a pas dans ce système de prise en compte des erreurs de modélisation.

¹National Centers for Environmental Predictions, qui est le centre météorologique Américain

Les buts d'une prévision d'ensemble à courte échéance des événements intenses seraient de quantifier de façon objective l'incertitude, ce qui est une information utile en soi, et de repérer des scénarios extrêmes, afin de caractériser les risques qu'un phénomène dangereux survienne. Le cadre d'utilisation dans lequel nous nous plaçons est celui où on sait que la situation est propice à un phénomène intense, mais la probabilité de son déclenchement et les trajectoires possibles sont incertaines. De ce point de vue, la question à laquelle on doit répondre est de savoir ce que la prévision d'ensemble peut apporter par rapport à la prévision déterministe dans un tel cadre.

Il existe cependant une difficulté à ce type d'approche, qui réside dans sa validation. Par définition, on s'intéresse ici à la prévision d'événements intenses et rares ; par conséquent le nombre de cas considérés est nécessairement faible. Or, l'évaluation d'une prévision d'ensemble est faite généralement à partir d'une collection de cas, où on compare les statistiques de la prévision d'ensemble à celle de la climatologie observée. La validation rigoureuse d'une prévision d'ensemble pour les événements extrêmes bute donc nécessairement sur la faible représentativité statistique de la collection de cas de validation. L'évaluation pourra donc se faire par la détermination de l'apport de la prévision d'ensemble par rapport à la prévision déterministe sur quelques cas propices à une tempête.

Néanmoins, si on considère le rôle du prévisionniste ou de tout autre responsable qui doit décider la mise en alerte d'une région, il importe d'avoir toutes les cartes en main. L'incertitude de la prévision est un atout indéniable, qu'une prévision d'ensemble peut fournir. L'intérêt principal de la prévision d'ensemble est qu'elle en donne une valeur objective. Sans elle, le prévisionniste l'assortit d'une incertitude, déterminée de façon subjective grâce à ses connaissances théoriques et son expérience du comportement de l'atmosphère et des modèles numériques. Cependant, cette incertitude ne prend pas souvent la forme d'une valeur probabiliste, et est donc difficile à valider. Une valeur objective de l'incertitude, comme par exemple une probabilité de dépassement de seuil, grâce à une prévision d'ensemble, fait maintenant partie de ce que la prévision numérique devrait être en mesure de fournir.

Les méthodes d'initialisation

Dans le but d'améliorer la prévision des tempêtes, on doit s'interroger sur la méthode d'initialisation de la prévision d'ensemble utilisée. On distingue généralement deux types de calcul des perturbations initiales :

- les techniques qui cherchent à échantillonner la distribution d'erreur d'analyse (*bred modes*, perturbation des observations, filtre de Kalman d'ensemble) ;
- celles qui recherchent les directions favorables de croissance d'erreur après l'instant initial (vecteur singuliers).

Idéalement, l'échantillonnage de la distribution d'erreur d'analyse est la technique la plus satisfaisante car le rôle de la prévision d'ensemble est de propager cette distribution dans le temps. Cependant, en raison du faible nombre de membres possibles, il est nécessaire de rechercher les directions possibles de croissance d'erreur afin de limiter les conséquences du sous-échantillonnage. Souvent même, les prévisions d'ensemble opérationnelles utilisent simplement les vecteurs singuliers, sans chercher à échantillonner l'erreur d'analyse. L'hypothèse ici est que les modes les plus instables sont des directions privilégiées de l'espace des phases

pour échantillonner l'incertitude (Molteni et al., 1996) ; et qu'il est donc peu utile de représenter l'erreur d'analyse. Surtout, la technique est moins coûteuse et algorithmiquement plus simple à mettre en œuvre.

Avec les moyens de calcul actuels, l'initialisation idéale d'une prévision d'ensemble à courte échéance des tempêtes serait donc un ensemble qui prenne en compte la distribution d'erreur d'analyse et qui se disperse dans les directions favorables de croissance d'erreur. Or, on a vu dans la partie 1.4.2 que les vecteurs singuliers ne sont pas théoriquement la meilleure technique d'initialisation dans une dynamique non linéaire en présence de structures cohérentes, car la dynamique de la croissance d'erreur est alors non linéaire. L'article publié joint (Plu et Arbogast, 2005) propose une technique d'initialisation par perturbation de la position et de l'amplitude des structures cohérentes initiales. Comme on l'a vu, celle-ci permet de mieux échantillonner les scénarios possibles qu'un ensemble initialisé par des vecteurs singuliers.

Une autre justification de cette technique d'initialisation pour la prévision d'ensemble des tempêtes réside dans la sélection des échelles et de la localisation. Elle permet en effet de cibler les perturbations sur un petit échantillon des sources d'incertitude, *a priori* bien choisi. En situation propice au déclenchement d'une tempête, la grande échelle, c'est-à-dire le régime de temps et les caractéristiques du courant-jet, est souvent bien déterminée et prévisible. La source d'incertitude principale résiderait plutôt dans les structures d'échelle synoptique préexistantes, c'est-à-dire dans une gamme d'échelle et dans une région données. En échantillonnant la distribution d'erreur associée aux seules structures pertinentes pour la tempête, on espère limiter les conséquences du sous-échantillonnage en ciblant véritablement les sources d'incertitude associées à la tempête.

Dans un cadre réel, une telle prévision d'ensemble pourrait être mise en œuvre grâce à l'extraction automatique des structures cohérentes de tourbillon potentiel et à l'inversion. La première étape consisterait à extraire de l'analyse toutes les structures cohérentes. Puis, il s'agirait de déterminer les structures susceptibles d'influencer la cyclogenèse considérée, soit par des critères spatio-temporels, soit par une technique proche de celles utilisées pour l'observation adaptative. Les modifications appliquées aux structures pourront être définies, soit de façon aléatoire, soit idéalement à partir de la distribution d'erreur d'analyse, qui peut être donnée par un ensemble qui l'échantillonne (perturbation des observations, Hamill et al., 2000, ou filtre de Kalman d'ensemble, Houtekamer et Mitchell, 1998) ou par un résultat du cycle d'assimilation (Hessienne de la fonction de coût minimisée dans un algorithme variationnel, Barkmeijer et al., 1999). Enfin, l'inversion du tourbillon potentiel appliquée à chacun des états modifiés donnera les états initiaux de la prévision d'ensemble.

Une première application de la technique d'initialisation d'une prévision d'ensemble par perturbation des structures cohérentes initiales sera montrée sur un cas réel de cyclogenèse. La technique n'est pas encore automatisée ; elle ne prend pas en compte la distribution d'erreur d'analyse du jour. Il s'agit donc encore d'une expérience préliminaire.

5.1.3 Première mise en œuvre sur le cas de la cyclogénèse du 3 octobre 2006

La situation d'une cyclogénèse intense est analysée, avant de montrer les résultats de la prévision déterministe puis ce que peut donner une version rudimentaire de la prévision d'ensemble initialisée par perturbation d'un précurseur d'altitude.

La situation synoptique

La dépression du 3 octobre 2006, associée à un front très actif (Fig. 5.1), a traversé le territoire français de l'Aquitaine à l'Alsace entre 06 TU et 18 TU, donnant lieu à de fortes précipitations et des vents instantanés à 10 m atteignant localement 38 m s^{-1} (soit 140 km/h).

L'Anasyg du 3 octobre à 00 TU (Fig. 5.1) permet de voir que le front actif est associé à une (ou plusieurs) anomalie d'altitude et à une sortie de courant-jet.

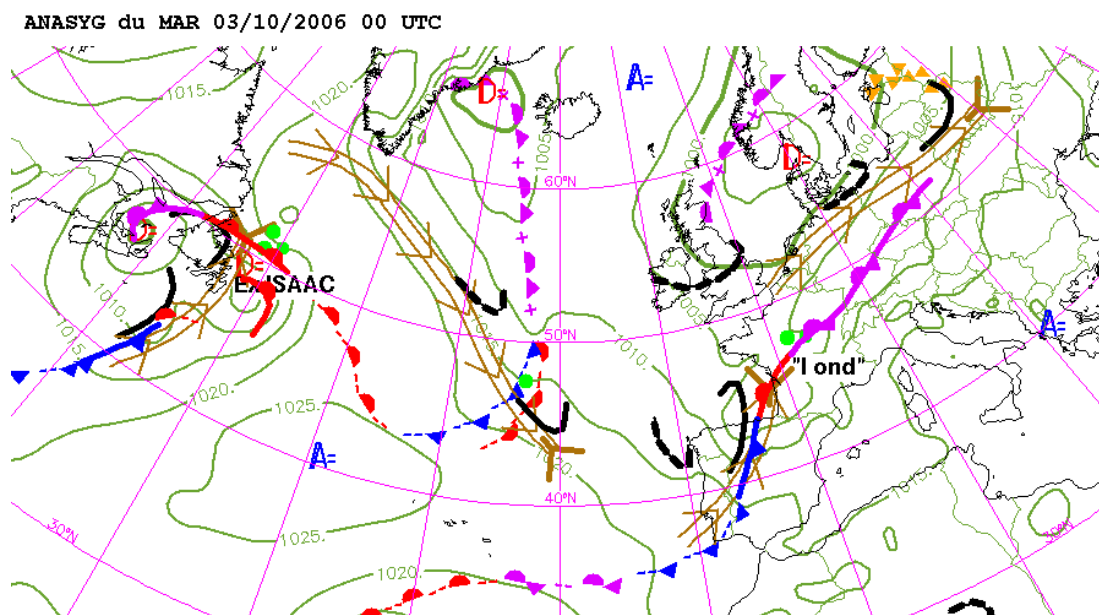


FIG. 5.1: Anasyg du 3 octobre 2006 à 00 TU. La cyclogénèse qui nous intéresse est marquée par un front actif situé sur l'estuaire de la Gironde, indiqué par le cartouche "l'ond". À cet instant, le front interagit avec une anomalie d'altitude (marquée par un trait gras noir) en sortie du courant-jet. Source : Centre National de Prévision, MÉTÉO-FRANCE.

Avant d'évaluer les prévisions, il faut définir une analyse de référence à laquelle se comparer. Il se trouve que sur ce cas, l'analyse proposée par ARPÈGE est défaillante : le 3 octobre à 06 TU, elle place le noyau de vorticité de basses couches trop au Sud (Fig. 5.2). L'analyse du CEPMMT semble être mieux calée en position, que ce soit par rapport à l'image satellite et aux vents moyens observés. C'est le cas aussi en intensité et position des vents forts. On consid rera donc l'analyse du CEPMMT comme référence lors du passage de la tempête sur la France.

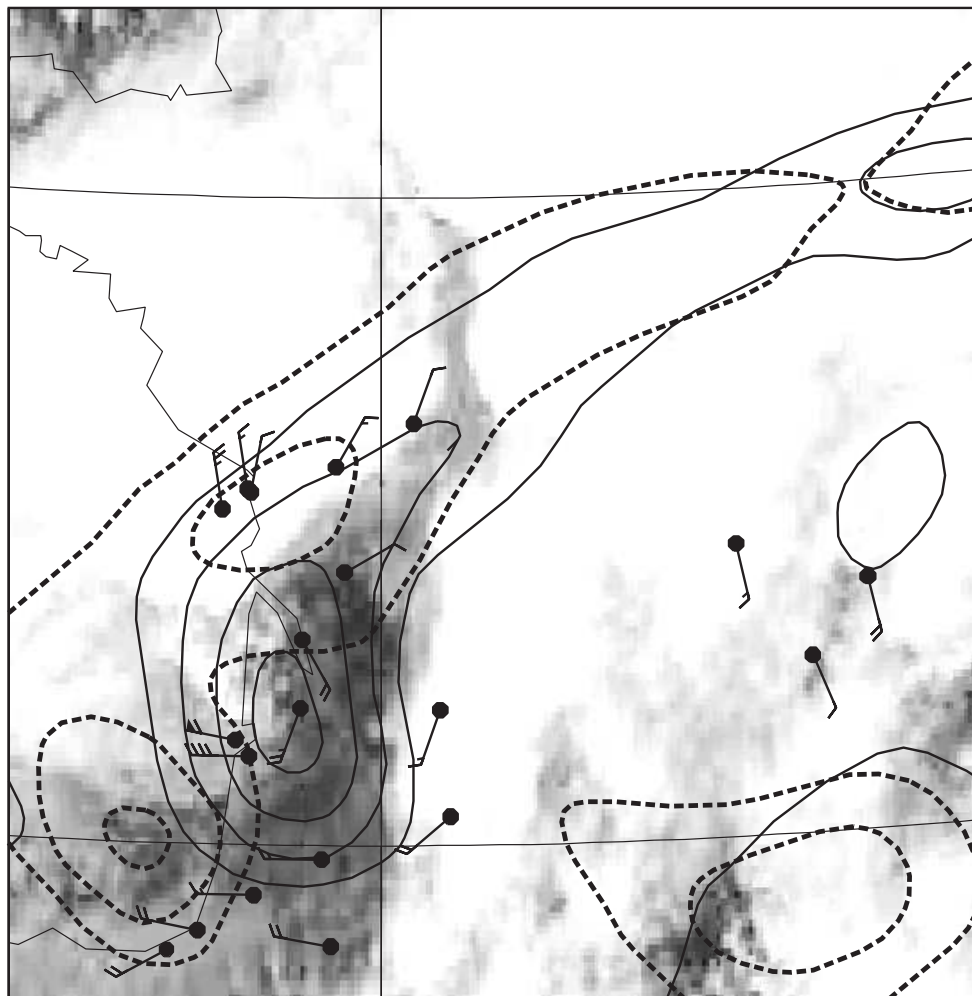


FIG. 5.2: Champs de tourbillon relatif au niveau 850 hPa (à partir de 10^{-4} s^{-1} , intervalle 10^{-4} s^{-1}) pour l'analyse ARPÈGE (en pointillé) et du CEPMMT (en trait plein). L'image Infrarouge (les points les plus clairs sont associés aux nuages dont le sommet est le plus haut) est affichée en fond. Les barbules de vent correspondent au vent moyen observé à 10 m. Le calage du noyau de tourbillon sur les vents mesurés et sur le champ nuageux est meilleur pour l'analyse du CEPMMT.

La dépression est matérialisée par un noyau de vorticité cyclonique sur le niveau isobare 850 hPa (Fig. 5.3). La signature en pression au niveau de la mer est moins marquée. En général, le vent analysé au niveau 850 hPa donne la valeur des rafales les plus fortes à 10 m. Le vent à 850 hPa de l'analyse du CEPMMT atteint des valeurs de 30 m s^{-1} (soit 110 km/h)   06 TU, et plus de 35 m s^{-1} (soit 130 km/h)   18 TU, qui sont proches des rafales observées à 10 m. En terme de force de vent, l'analyse du CEPMMT sera donc aussi considérée comme la référence par rapport à laquelle les prévisions seront comparées.

Considérons maintenant les champs dynamiques en altitude et leurs liens avec les basses couches avant l'arrivée de la tempête sur la France. La Fig. 5.4 montre l'évolution des analyses du modèle ARPÈGE entre le 1 octobre à 18 TU et le 3 octobre à 00 TU. Bien que l'analyse ne soit pas la meilleure comme on vient de le voir, les données d'ARPÈGE sont préférées ici car les champs d'altitude sont moins bruités que ceux du CEPMMT, en particulier la température potentielle sur la tropopause dynamique. Une vérification rapide montre que les analyses d'ARPÈGE et du CEPMMT sont assez proches aux instants de la formation de la dépression : les structures principales sont présentes et semblables, ce qui permet de décrire et d'interpréter la dynamique de façon sûre.

Choisissant le 1 octobre 2006 à 06 TU comme état initial, on se trouve en présence d'un vaste thalweg orienté NE-SW qui s'étend en altitude des Iles Britanniques au sud des Açores. Une anomalie de vorticité **P** circule dans les basses couches sur le flanc est de ce thalweg. Elle est étirée dans l'axe du flux et se dirige vers le NE. Par des mécanismes qui restent à élucider, la partie la plus au sud du thalweg prend une géométrie circulaire et se transforme en goutte froide. Celle-ci retient la partie sud de l'anomalie de basses couches **P**₁ qui se met à tourner dans le sens cyclonique sur le flanc nord de la goutte froide. Le phénomène qui nous intéresse concerne la partie nord du thalweg et de l'anomalie de basses couches **P**₂. Alors que la partie sud s'isole, une interaction renforce mutuellement le point étroit du thalweg d'altitude – qui devient une anomalie cyclonique d'altitude le 2   12 TU – et la partie nord de la perturbation de basses couches. En s'amplifiant, elle devient un système actif à part entière situé le 2   12 TU au sud de la Corogne. Dans la nuit du 2 au 3, cet ensemble franchit sans encombre la Galice et entre dans le Golfe de Gascogne, tout en s'amplifiant mais en conservant une échelle spatiale modeste. La distance horizontale entre les anomalies d'altitude et de basses couches se réduit, voire disparaît alors que l'ensemble atteint la maturité sur le centre de la France le 3 octobre à 12 TU (voir Fig. 5.3).

Cette partie de l'évolution rapide entre un thalweg d'altitude et une anomalie de basses couches n'est pas sans rappeler la simulation idéalisée de Thorncroft et Hoskins (1990). Ceux-ci ont découvert dans la phase non linéaire et haute-résolution d'une séquence de cyclogenèse modale de grande échelle sur la sphère un scénario de formation « d'onde » de seconde génération soudain et rapide qui ne doit rien à une instabilité et s'explique bien en termes d'interaction entre structures d'amplitude finie.

La prévision déterministe

Les prévisions sont faites par le modèle opérationnel ARPÈGE, en équations primitives. La résolution sur la sphère est T358C2.4 (troncature triangulaire 358, coefficient d'étirement 2,4).

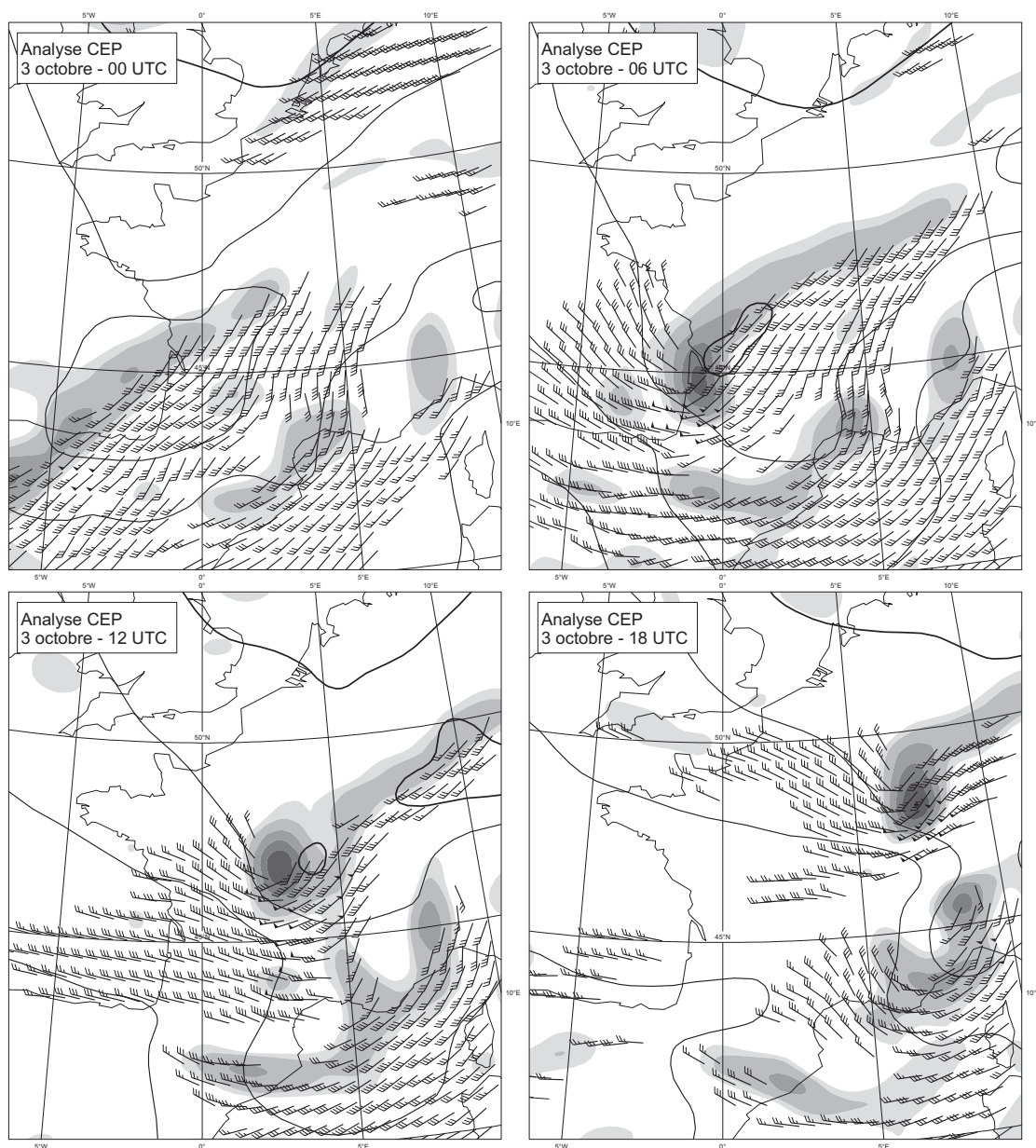


FIG. 5.3: Vorticité relative (plages de gris à partir de 0, intervalle $5 \cdot 10^{-5} \text{ s}^{-1}$) et vent (barbules à partir de 25 nœuds) au niveau 850 hPa, ainsi que la pression réduite au niveau de la mer (isolignes noires, intervalle 5 hPa, l'isoligne grasse indique 1000 hPa) analysés la journée du 3 octobre par le modèle du centre Européen. La résolution des données est $0,5^\circ$.

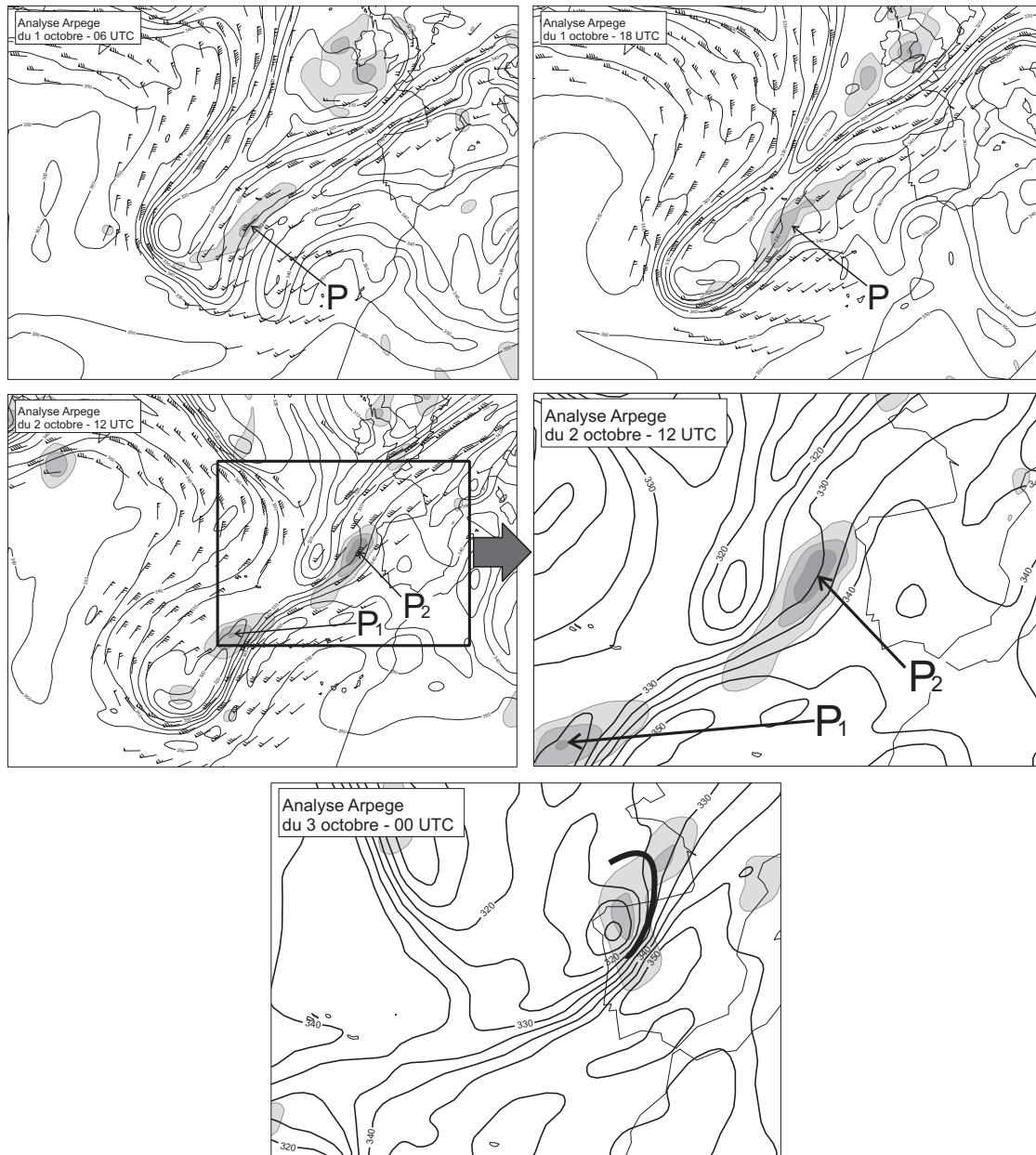


FIG. 5.4: Champs sur la tropopause dynamique (température potentielle, intervalle 5 K, et bar-bules de vent à partir de 50 nœuds sur la surface 1,5 pvu) et en basses couches (vorticité relative au niveau 850 hPa, plages de gris à partir de 0 par intervalle de $5 \cdot 10^{-5} \text{ s}^{-1}$), entre le 1 octobre à 06 TU et le 3 octobre à 00 TU. Les anomalies de basses couches P, puis P1 et P2 sont signalées. Le 3 octobre à 00 TU, la marque de l'anomalie d'altitude figurant sur l'Anasyg (Fig. 5.1) est reproduite.

Il est question ici de prévision à courte échéance (inférieure à 48 h), où on évalue la capacité du système à prévoir correctement l'intensité et la position de la dépression, ainsi que la force des vents de basses couches (Fig. 5.5). Bien que le système considéré ait été lié à de la convection, la qualité de la prévision des précipitations ne sera pas évaluée.

La Fig. 5.5 illustre la faible cohérence temporelle des prévisions, souvent interprétée comme un signe d'incertitude. Le 1 octobre à 06 TU, une tempête avec des vents maximaux de 25 m s^{-1} est prévue. Cependant, le noyau de vorticité est positionné trop au nord. Les réseaux du 1 octobre à 12 TU et du 2 octobre à 00 TU ne prévoient pas de tempête forte, mais seulement une dépression peu intense qui est advectée très rapidement. Pour le réseau du 2 octobre à 00 TU, la dépression est même fortement étirée vers l'Est et d'amplitude faible. En revanche, le réseau du 2   06 TU donne lieu à une tempête intense avec des vents légèrement plus forts que ceux de l'analyse.

La technique qui considère les prévisions issues de réseaux différents a été une des premières envisagées pour quantifier l'incertitude des prévisions (Hoffman et Kalnay, 1983), en raison de son coût numérique quasi-nul. L'évaluation de ce type d'« ensemble du pauvre » avec des scores probabilistes montre des résultats moins bons que pour d'autres ensembles. Ce résultat est attribué à la moindre indépendance des « membres » de l'ensemble que lorsqu'on perturbe une seule analyse.

Le réseau du 1 octobre à 18 TU (Fig. 5.6) est caractéristique d'une mauvaise prévision. La cyclogenèse se concrétise par un vortex anisotrope mal positionné, qui donne lieu à des vents peu forts en comparaison de l'analyse. On remarque aussi que la prévision de la dynamique d'altitude à un instant intermédiaire (Fig. 5.7) est assez mauvaise : l'anomalie froide prévue le 2   12 TU est peu marquée en comparaison de l'analyse vérifiante.

Que peut-on dire de la situation future après avoir pris connaissance de la prévision du réseau du 1 octobre 2006 à 06 TU ? La présence d'un noyau cyclonique en basses couches dans la plupart des prévisions partant des réseaux précédents laisse supposer qu'il y a un risque de tempête sur la France pour le 3 octobre. L'analyse de la situation en altitude (Fig. 5.4) et sa prévision (Fig. 5.7) suggère une interaction entre le thalweg d'altitude et un noyau cyclonique en basses couches. Le risque de passage d'une dépression sur l'Europe est ainsi confirmé par l'existence prévue d'une anomalie d'altitude à proximité du noyau de vorticité en basses couches. On est donc dans une situation propice au déclenchement d'une tempête. Cependant, compte tenu de l'hétérogénéité des prévisions réseau par réseau et de la sensibilité aux conditions initiales dans ce type d'écoulement, il demeure une grande incertitude quant à l'intensité de la dépression et à sa localisation.

La prévision déterministe partant du 1 octobre 2006 à 06 TU donne un scénario possible. Une première approche de quantification de l'incertitude de la prévision par la perturbation des précurseurs initiaux va être maintenant proposée.

Initialisation d'un ensemble par perturbation d'un précurseur d'altitude

Les analyses (Fig. 5.4) suggèrent que la dynamique d'altitude joue un rôle sur la cyclogenèse considérée. De plus, aux instants où le système couplé entre l'anomalie d'altitude et le noyau de basses couches se met en place, la prévision déterministe en altitude (Fig. 5.7) prévoit une anomalie d'altitude d'assez faible amplitude et peu marquée. Une source d'erreur dans la prévision

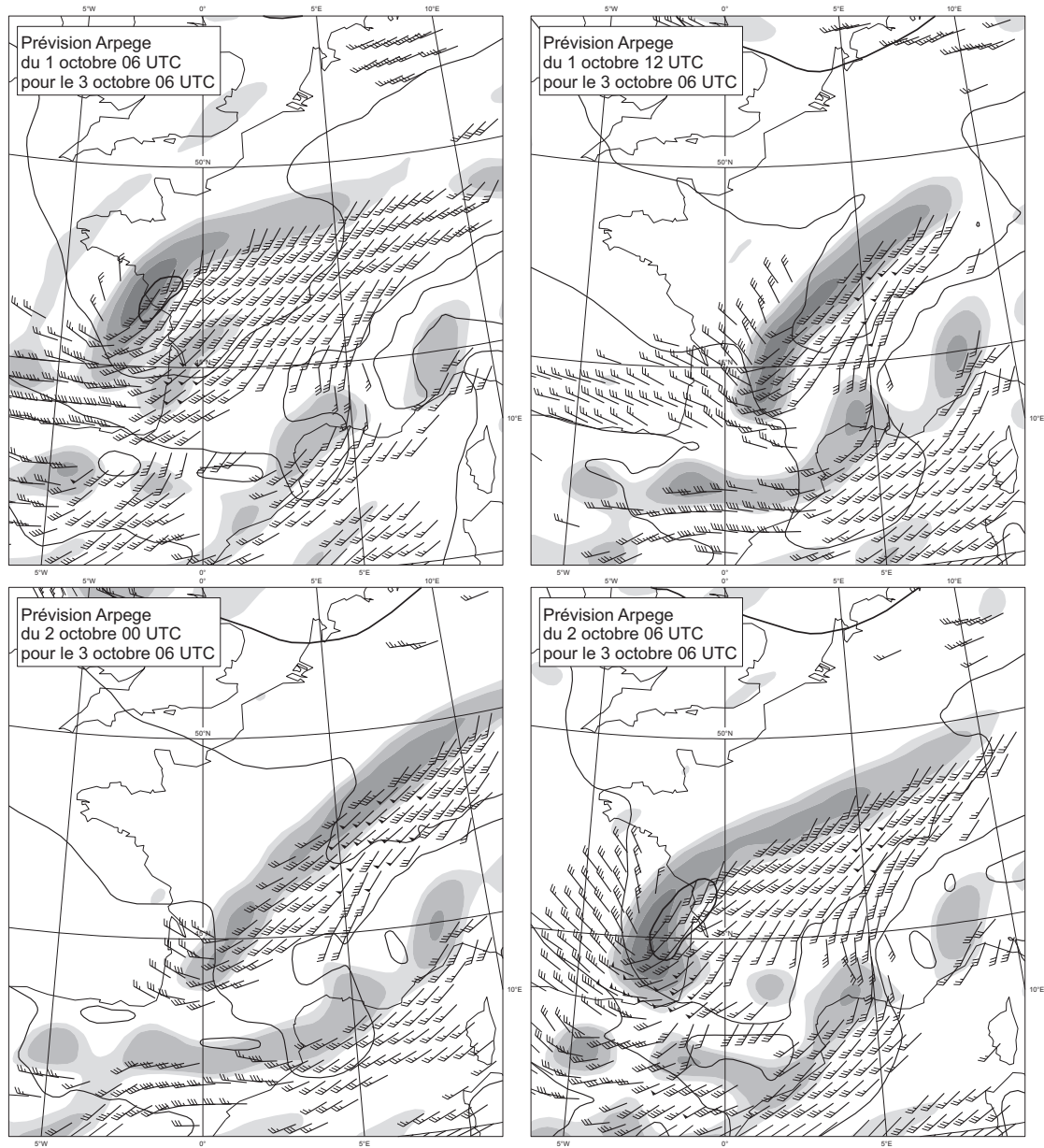


FIG. 5.5: Prévisions pour le 3 octobre à 06 TU représentatives de quelques réseaux des 1 et 2 octobre. Même légende que la Fig. 5.3. Les prévisions montrent une grande variabilité.

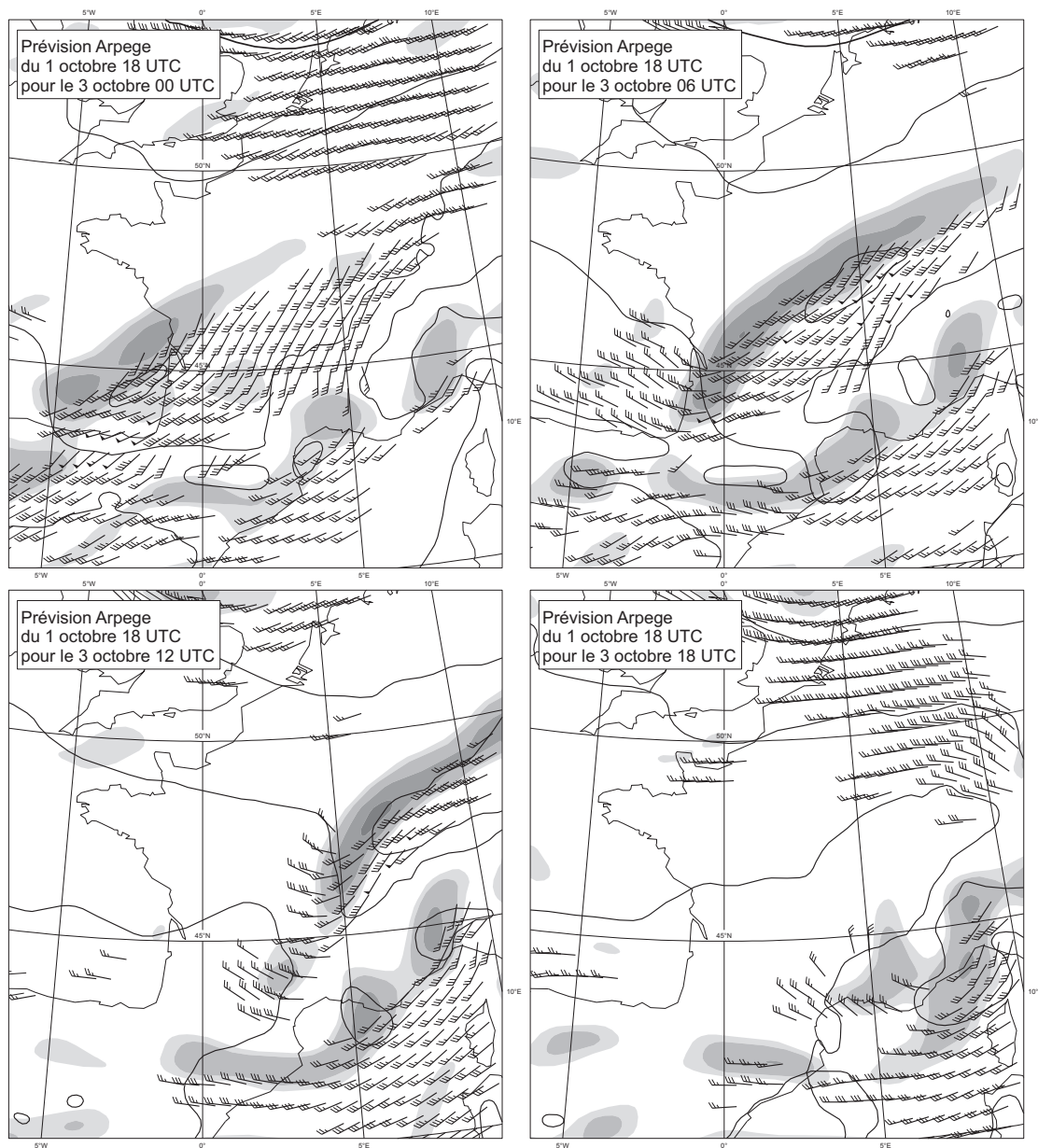


FIG. 5.6: Prévisions du réseau du 1 octobre à 18 TU pour la journée du 3 octobre. Même légende que la Fig. 5.3.

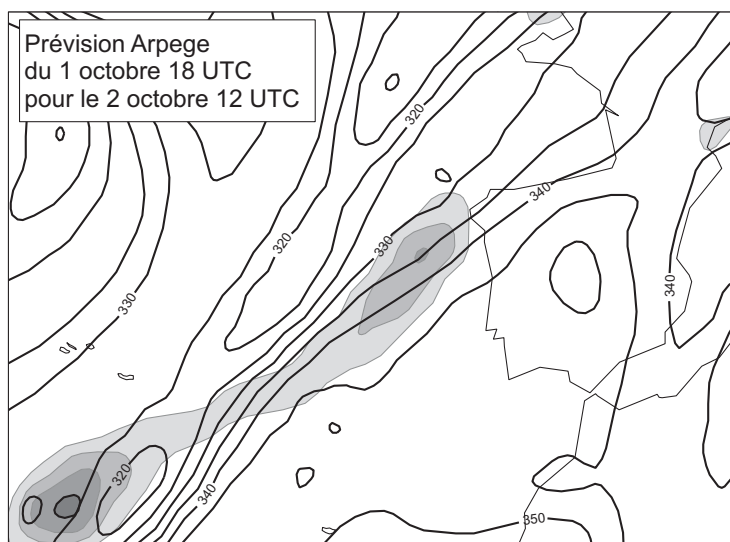


FIG. 5.7: *Superposition des dynamiques d'altitude et de basses couches prévues pour le 2 octobre à 12 TU à partir du réseau du 1 octobre à 18 TU. En isolignes noires, température potentielle à la tropopause dynamique (même légende que la Fig. 5.4) et en plages de gris, vorticité cyclonique au niveau 850 hPa (même légende que la Fig. 5.4).*

vient donc certainement de la dynamique en altitude.

Il est donc pertinent de tenter une prévision d'ensemble en échantillonnant les caractéristiques de la structure cohérente d'altitude qui interagit avec la dépression de basses couches. Cette expérience est proposée pour un seul réseau, le 1 octobre à 18 TU. Il s'agit de la première expérience de ce type, par conséquent elle sera rudimentaire par rapport à la méthode générale décrite plus haut. En particulier, une seule structure, choisie subjectivement parmi anomalies extraites par l'algorithme en ondelettes, sera perturbée, et on n'utilisera pas de variance d'erreur d'analyse pour contraindre les perturbations.

La première étape consiste à extraire la structure d'altitude pertinente. L'algorithme de détection et d'extraction des structures cohérentes est appliqué sur les champs de tourbillon potentiel entre les niveaux isobares 100 et 600 hPa. De nombreuses structures sont détectées (fig. 5.8). Cependant, si on suit « à l'œil » l'évolution passée de l'anomalie d'altitude déterminée sur les analyses (Fig. 5.4), on s'aperçoit qu'une structure principale est concernée. Son extraction sur le niveau 300 hPa apparaît sur la Fig. 5.8.

Cette structure est extraite sur tous les niveaux isobares où elle est détectée, c'est-à-dire entre 200 hPa et 475 hPa, par intervalle de 25 hPa. Pour initialiser la prévision d'ensemble, seule cette structure sera perturbée. D'autres anomalies peuvent jouer un rôle sur l'intensité et la localisation du cyclone ; cependant il sera question ici d'illustrer la sensibilité à ce précurseur principal.

La perturbation de l'anomalie suit ici une stratégie rudimentaire, qui consiste à échantillonner les positions et les amplitudes possibles de façon arbitraire. Il s'agit de perturber la structure initiale, en lui appliquant un ensemble de translations et un facteur d'amplification ou de diminution. Les mêmes transformations sont appliquées sur toute la dimension verticale de la structure : on

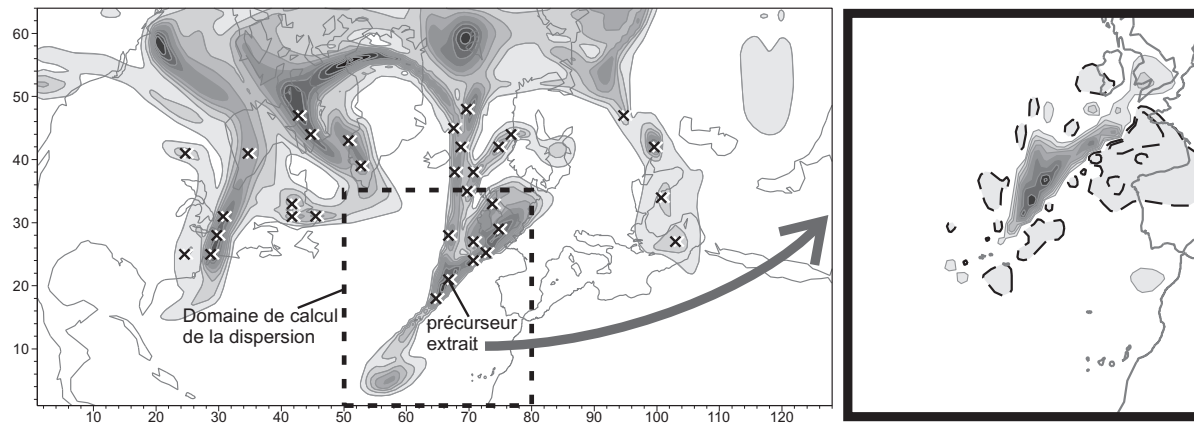


FIG. 5.8: Détection des structures cohérentes (à gauche) et extraction du précurseur (à droite) sur le niveau 300 hPa, le 1 octobre 2006 à 18 TU. Sur le champ total de tourbillon potentiel (à gauche, intervalle 1 pvu), les croix montrent le centre des structures détectées, avant extraction complète et orthogonalisation. L'extraction de la structure qui sera perturbée est montrée à droite (intervalle 1 pvu, isolignes négatives en pointillé).

ne cherche pas ici à perturber la structure de cette anomalie.

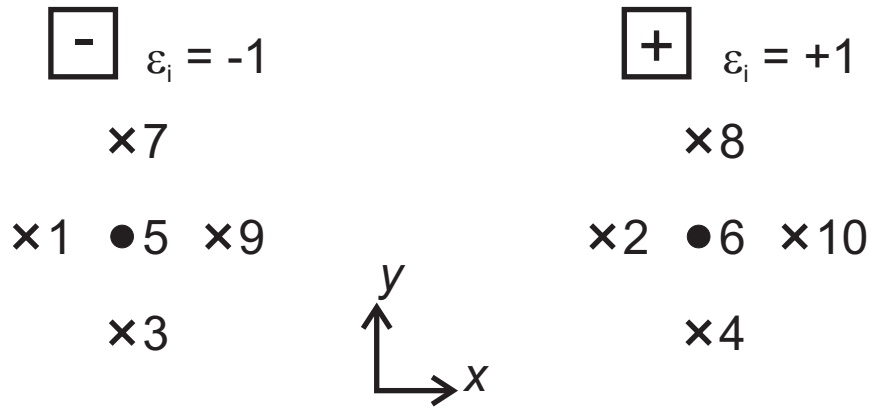


FIG. 5.9: Numérotation des dix membres de l'ensemble obtenus par translation, diminution ($\epsilon_i = -1$, à gauche) et amplification ($\epsilon_i = +1$, à droite) de la structure initiale. Afin d'éviter l'erreur due aux interpolations, les translations sont de 1 dans la direction des axes du domaine (croix) ou de 0 (point au centre) point de grille.

Si q est le champ total et q_s la structure extraite, le tourbillon potentiel du membre q_i ($1 \leq i \leq 10$) s'écrit :

$$q_i = (q - q_s) + \epsilon_i \alpha_i t_i(q_s),$$

où t_i signifie l'opérateur de translation associé au membre i , ϵ_i le signe de la correction (diminution ou augmentation) et α_i la modification de l'amplitude de la structure ($\alpha_i > 0$). La taille de l'échantillon est petite pour une véritable prévision d'ensemble, mais elle suffira pour repérer

quelques scénarios alternatifs à la prévision déterministe. La numérotation des 10 membres initiaux obtenus apparaît sur la Fig. 5.9.

L'amplitude des perturbations doit respecter l'ordre de grandeur de la variance d'erreur d'analyse climatologique, ce qui contraint la valeur maximale des coefficients d'amplitude α_i . Chaque coefficient α_i est donc la valeur maximale telle que l'erreur intégrée sur un domaine caractéristique (en pointillé sur la Fig. 5.8) soit inférieure à une valeur climatologique (exemple : 1 pvu à 300 hPa). Cette contrainte est encore trop souple : dans certains cas, elle donne α_i autour de 0,8, ce qui crée une perturbation locale trop importante. Par conséquent, on choisit de limiter α_i à 0,3, si le calcul précédent le donne supérieur. La normalisation ainsi faite permet de situer la variance de l'ensemble initial dans les bornes de la climatologie de l'erreur d'analyse.

Pour être utilisables comme conditions initiales des prévisions, les 10 distributions de tourbillon potentiel sont inversées. Conformément aux expériences précédentes, la condition d'équilibre pour l'inversion est implicite (Arbogast et al., 2008). L'algorithme est intégré à l'environnement du modèle ARPÈGE, et fonctionne à la résolution opérationnelle, qui est T358C2.4, identique à la résolution des prévisions.

Étude de sensibilité au précurseur extrait : embryon d'une prévision d'ensemble

Comme la prévision déterministe était défailante, il s'agit de déterminer les scénarios de la prévision d'ensemble qui permettent de s'approcher de l'analyse vérifiante, en terme de position et de force de la dépression prévue. La Fig. 5.10 montre les scénarios possibles pour le 3 octobre à 06 TU, pour l'ensemble obtenu par perturbation d'une structure initiale (PSC). Un large éventail de solutions apparaît concernant l'existence et l'intensité d'une tempête, ce qui confirme la forte sensibilité de la prévision à la structure initiale perturbée.

La grande majorité des membres de l'ensemble font une tempête faible et mal localisée (1,2,3,4,5,7,9). Les membres 6 et 8 créent une tempête assez bien localisée. L'amplitude de la tempête du membre 8 est identique à celle de l'analyse ; celle du membre 6 est légèrement plus faible. Le membre 10 a une tempête intense, qui se propage beaucoup plus vite que la tempête observée (à tel point qu'elle sort du domaine de la figure à 06 TU).

L'ensemble propose donc davantage de membres autour du contrôle qu'autour de l'analyse. Cela se comprend parce que la majorité des membres ont une structure cohérente d'amplitude plus faible que celle de l'analyse. Or, les membres les plus proches de l'analyse sont obtenus pour une amplification de la structure (6, 8, 10), ce qui suggère que l'amplitude de la structure dans l'analyse est certainement plus faible que la vérité. En prenant en compte la distribution d'erreur d'analyse du jour, il serait sans doute possible de contraindre l'ensemble dans des directions plus favorables.

Les propriétés du champ de dispersion de l'ensemble, en terme de position et d'amplitude, peuvent aussi être documentées. On définit la dispersion d'un ensemble comme étant l'écart-type des valeurs d'un champ. Elle caractérise l'incertitude donnée par l'ensemble, dans le sens où plus la prévision est incertaine, plus l'ensemble doit être dispersé. L'amplitude de la dispersion de l'ensemble est évaluée en altitude et en basses couches.

Initialement et par construction, la dispersion de l'ensemble (Fig. 5.11) est forte et concentrée

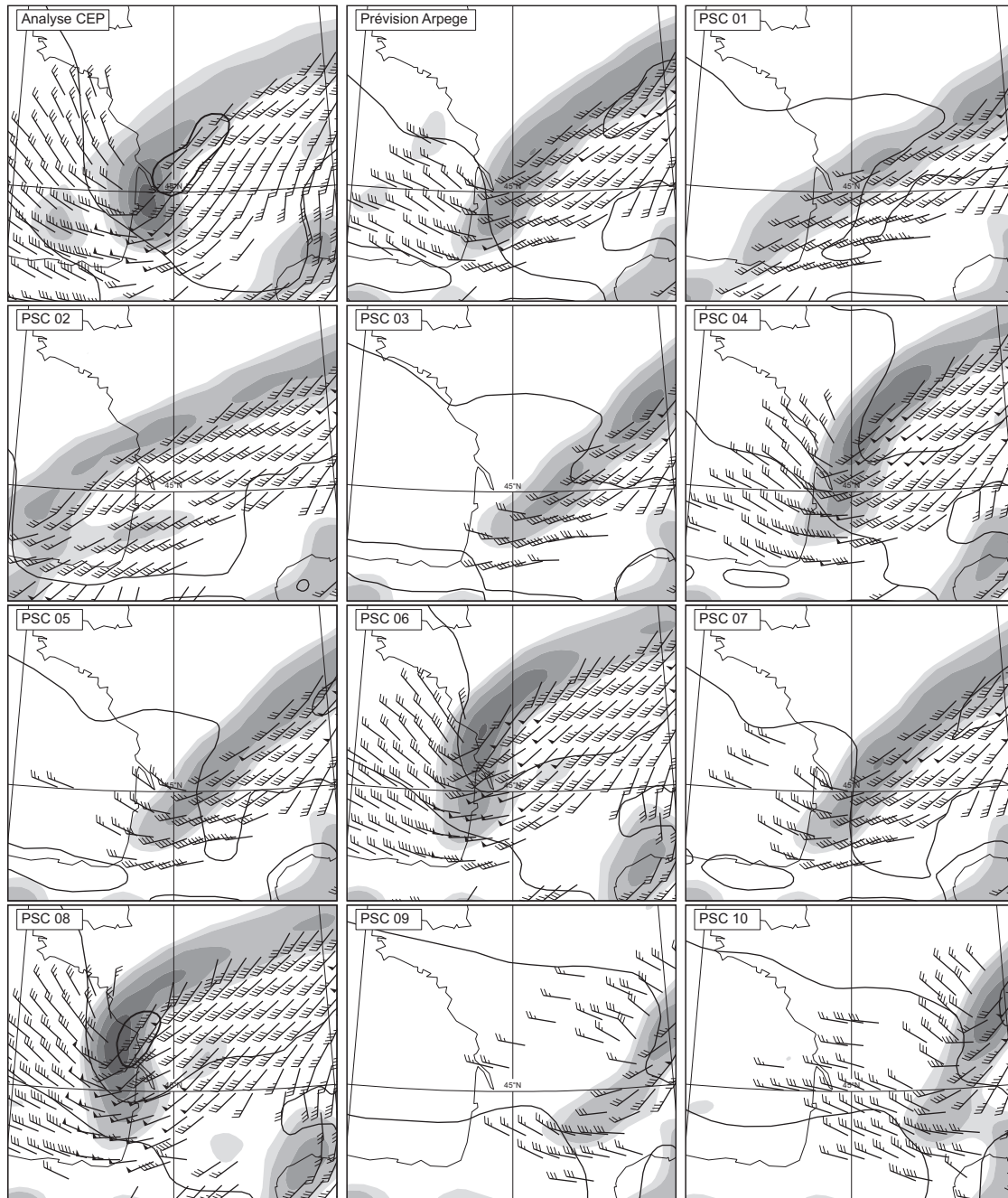


FIG. 5.10: Vignettes de l'ensemble de prévisions du 1 octobre 2006 à 18 TU, pour le 3 octobre 2006 à 06 TU. Dans l'ordre de lecture : l'analyse vérifiante, la prévision déterministe de contrôle, et les membres successifs de la prévision d'ensemble (PSC). Les champs sont la vorticité relative et le vent à 850 hPa, ainsi que la pression réduite au niveau de la mer. Les champs ont les mêmes attributs graphiques que ceux de la Fig. 5.3.

autour de la structure perturbée. Le 2 octobre à 12 TU, la dispersion de l'ensemble PSC se colocalise avec les structures cohérentes de l'écoulement et les zones de gradient. Le maximum de dispersion demeure piégé dans la structure cohérente perturbée initialement et de la dispersion apparaît le long des gradients.

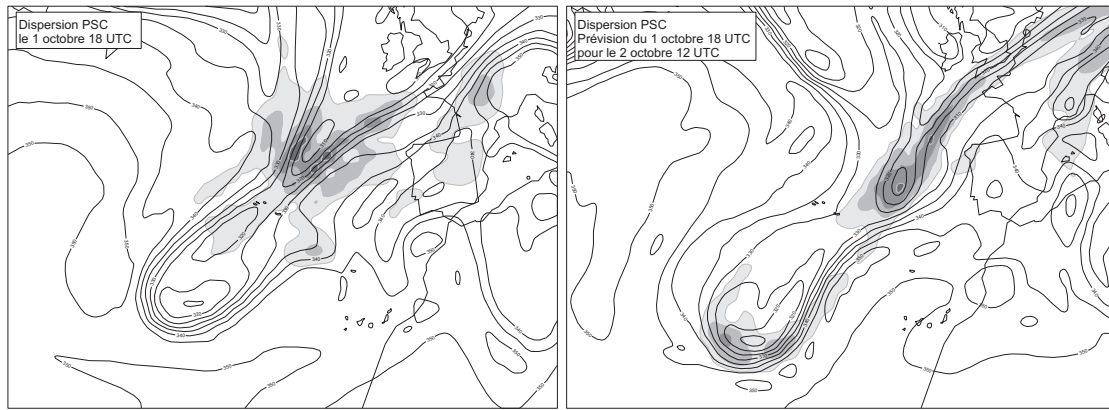


FIG. 5.11: Dispersion de la température potentielle sur la tropopause dynamique 1,5 pvu (plages de gris, intervalle 1 K) des onze membres de la prévision d'ensemble du 1 octobre 2006 à 18 TU, pour le 1 octobre 2006 à 18 TU (à gauche) et pour le 2 octobre 2006 à 12 TU (à droite). Le champ analysé est superposé en trait noir (même contours que la Fig. 5.4).

5.1.4 Conclusion et perspectives

Les résultats présentés suggèrent qu'une prévision d'ensemble basée entre autres sur des perturbations dans un espace décrivant les structures cohérentes pourrait proposer des scénarios d'évolution variés pour la dépression, qui permettraient de quantifier au moins une partie de l'incertitude sur ses caractéristiques. Le prototype d'ensemble ici a été créé en perturbant un petit nombre de degrés de liberté (une seule structure en altitude), et par une méthode aléatoire encore très rudimentaire.

Il y a de nombreuses améliorations à apporter à cette ébauche d'ensemble. Tout d'abord, il faudrait tirer partie de la distribution d'erreur d'analyse du jour, obtenue comme un résultat de l'assimilation ou par des observations perturbées. Le couplage entre l'échantillonnage de l'erreur initiale et les structures cohérentes perturbées permettra de construire un ensemble qui prenne en compte une bonne partie des incertitudes associées à un système synoptique.

Bien sûr, dans une version idéale, il faudrait perturber toutes les structures associées à ce système. Sur le cas exposé ici, seule une structure d'altitude l'a été ; il faudrait perturber aussi la structure de basses couches, et éventuellement d'autres structures voisines qui peuvent avoir un impact sur le système. La détermination des structures à perturber devra être faite de façon objective par exemple par un calcul de sensibilité aux conditions initiales, comme ceux développés pour l'observation adaptative.

L'exemple étudié ici ne propose que 10 membres pour l'ensemble, ce qui est faible. Augmenter le nombre de membres à 20, 30, voire 50 serait plus satisfaisant. Pour cela, le dimensionne-

ment par le temps de calcul sera essentiel. Le temps de calcul de l'ensemble est principalement consommé par l'inversion du tourbillon potentiel, et en particulier par l'initialisation par filtres digitaux, nécessaire pour garantir la condition d'équilibre des états inversés.

Pour finir sur la prévision d'ensemble des événements intenses par cette nouvelle technique, il est important d'en fournir un cadre d'utilisation et de validation. Rappelons qu'il s'agit d'un système à mettre en œuvre à la demande, c'est-à-dire lorsqu'on est en situation propice au déclenchement d'un tel événement. Détecter une telle situation peut se faire de façon subjective, mais aussi par des méthodes plus objectives, comme par exemple la détection d'un régime de temps ou, grâce à l'outil d'extraction automatique, la présence de structures cohérentes en altitude ou en basses couches. Un échantillon de validation de ce système serait l'ensemble des cas favorables au déclenchement d'une tempête, sur lesquels on pourrait calculer les scores probabilistes classiques d'une prévision d'ensemble. Le choix de l'échantillon est en effet primordial. Constituer un échantillon de façon aléatoire ne permet pas de cibler la validation sur la prévision des tempêtes. Choisir uniquement des jours de tempêtes fausse la validation car elle ne permet pas de reproduire des cas où la tempête n'a pas lieu, et donc les taux de fausse alerte.

C'est sur un tel échantillon qu'on pourra statuer sur les performances véritables de la prévision d'ensemble des tempêtes à courte échéance.

5.2 Assimilation d'images

Une autre application de l'extraction pourrait être l'assimilation d'images dans les modèles atmosphériques.

Actuellement, l'initialisation des modèles météorologiques est faite grâce à l'assimilation d'observations qui sont traitées comme des valeurs ponctuelles. C'est le cas des mesures au sol, des radiosondages, mais aussi des observations satellitaires. Or justement, les satellites météorologiques offrent des images dont les techniques d'assimilation actuelles ne tirent pas profit. Par exemple, le canal vapeur d'eau permet de repérer les intrusions sèches stratosphériques dans la troposphère, signature d'anomalies de tourbillon potentiel. Cette information est régulièrement utilisée par les prévisionnistes de MÉTÉO-FRANCE qui peuvent corriger la tropopause dynamique "à la main" et caler les anomalies de tourbillon potentiel qui sont mal positionnées, l'algorithme d'inversion du tourbillon potentiel en déduisant l'état atmosphérique corrigé. Cependant, la relation entre la distribution de tourbillon potentiel et les radiances du canal vapeur d'eau n'est pas simple : les informations à assimiler sont la position, la forme et l'amplitude de la structure, mais pas directement des valeurs de champs observés.

Michel et Bouttier (2006) proposent d'assimiler des pseudo-observations de tourbillon potentiel (Guérin et al., 2006) déduites des caractéristiques des structures extraites de l'image vapeur d'eau. Les difficultés de cette approche résident dans la relation entre tourbillon potentiel et radiances. Une solution alternative pourrait consister à assimiler directement les radiances de l'image observée, en tirant partie de la représentation en ondelettes des structures cohérentes incluses dans l'image. Il existe des opérateurs d'observation qui donnent, à partir du vecteur d'état du modèle, les radiances simulées de ce canal. La comparaison entre l'ébauche et l'observation peut ainsi se faire dans l'espace des images observées. Le traitement par le système d'assimila-

tion des erreurs de position et d'amplitude des structures dans l'ébauche et dans l'image observée permettrait alors de corriger ces paramètres dans l'état initial.

Il faudra cependant évaluer la compatibilité de ce type d'approche avec les hypothèses linéaires des systèmes d'assimilation. Pour le cas des cyclones tropicaux, des techniques d'assimilation de la position de vortex, déduites d'images satellite, et de leur amplitude commencent à être expérimentées, par exemple en utilisant un filtre de Kalman d'ensemble (Chen et Snyder, 2007).

Conclusion

L'objet principal de cette thèse a été de définir de façon automatique et objective les structures cohérentes d'échelle synoptique. La projection des champs sur des bases d'ondelettes orthogonales a permis d'écrire un algorithme d'extraction des structures cohérentes, qui ne dépend d'aucun paramètre externe. Il donne une définition objective au concept d'anomalie d'amplitude finie ou de structure cohérente, qui est mis en jeu dans le modèle conceptuel de l'interaction barocline, mais qui demeurait relativement flou. Grâce à la représentation en ondelette, chaque structure peut s'écrire comme la somme d'un nombre limité de coefficients d'ondelettes appartenant à une même base orthogonale. Un petit nombre de degrés de liberté du système est ainsi impliqué dans l'écriture d'une structure. De ce fait, il est possible de compresser l'information contenue dans le champ de façon optimale. De plus, les structures ainsi déterminées peuvent être translatées, amplifiées et déformées, ce qui ouvre la voie à de la *chirurgie* sur les structures cohérentes extraites. La présente thèse peut ainsi être vue comme une suite des travaux sur l'inversion du tourbillon potentiel (Arbogast, 1998), qui permet de définir la dynamique d'échelle synoptique par le seul champ de tourbillon potentiel. La définition des structures cohérentes condense encore davantage l'information contenue dans la dynamique en la résumant aux anomalies de tourbillon potentiel et à leur environnement, écrites sous la forme d'un nombre limité d'ondelettes.

Puisque l'extraction objective des anomalies du champ de tourbillon potentiel est rendue possible, l'attribution des champs dynamiques à cette anomalie est univoque. De plus, l'environnement dans lequel une structure évolue est obtenu comme le résidu après sa soustraction au champ initial. Si on demande de plus à l'environnement d'être propagé par sa dynamique propre, cette définition permet de caractériser la cohérence temporelle de la structure extraite et donc d'évaluer la technique d'extraction. Ce critère est équivalent à la bonne préservation des propriétés morphologiques de l'anomalie, qu'elle soit directement extraite du champ, ou propagée par le modèle numérique. Selon ce critère, l'algorithme en ondelettes extrait des structures qui ont une meilleure cohérence que des anomalies extraites par des méthodes plus classiques, comme l'extraction d'un monopole par exemple. Cette propriété permet de lui attribuer les champs météorologiques évoluant au cours du temps, soit par la propagation par le modèle numérique, soit par extraction à chaque instant.

L'algorithme d'extraction proposé dans la présente thèse pourrait encore être amélioré. La correspondance temporelle des anomalies n'est pas exploitée, qui permettrait de s'intéresser au cycle d'évolution complet de ces structures. En outre, dans la version actuelle, les structures filamenteuses peinent à être reproduites correctement. Celles-ci étant importantes pour tous les développements frontaux, il sera essentiel de traiter ce problème de façon satisfaisante.

L'apport théorique de la définition des structures cohérentes de tourbillon potentiel permet

d'améliorer la compréhension des mécanismes à l'œuvre dans la cyclogenèse. Son application au précurseur d'altitude d'une tempête exceptionnelle, la deuxième tempête de Noël 1999, confirme son rôle pour la cyclogenèse. Sur le cas de la première tempête de Noël 1999, où il ne semble pas possible de repérer un précurseur d'altitude, on a pu extraire le rapide de courant-jet qui est associé à une structure cohérente évoluant lentement. La caractérisation de cette structure confirme l'étude diagnostique de Pyle et al. (2004) qui montre le lien entre rapides de courant-jet et structures cohérentes d'altitude. Sur le cas considéré, l'annulation de la structure associée au rapide de courant-jet annihile le caractère explosif de la tempête.

Les événements précipitants en région Méditerranéenne sont souvent associés à des anomalies d'altitude de tourbillon potentiel, que l'algorithme d'extraction a permis de documenter pour des pluies sur le pourtour du Golfe du Lion. L'algorithme trouve effectivement une forte population de structures à l'Ouest de la région de précipitation, dont l'extraction permet de caractériser la forme et l'intensité.

L'extraction automatique des structures cohérentes permet de plus de définir de nouveaux outils pour la prévisibilité des événements intenses. Les cyclogenèses étant fortement sensibles aux structures cohérentes préexistantes, il est possible d'échantillonner une partie des évolutions possibles d'une cyclogenèse en perturbant initialement les structures de tourbillon potentiel. On obtient ainsi une technique qui ne repose pas sur une hypothèse d'évolution linéaire des perturbations initiales, contrairement à l'initialisation par les vecteurs singuliers. Par conséquent, un tel ensemble semble mieux adapté aux phénomènes fortement non linéaires, parfois à seuil, qui ont lieu lors des cyclogenèses intenses, pour l'évolution desquelles la position et l'amplitude des structures initiales est particulièrement importante. Pour l'améliorer, il sera nécessaire de prendre en compte l'incertitude de l'analyse.

On pourrait donc envisager la mise en place d'un système de prévision d'ensemble des tempêtes à courte échéance qui utilise une telle technique d'initialisation. Souvent, on sait que la situation est propice au déclenchement d'une tempête, mais il est très difficile de caractériser la probabilité de son déclenchement ou non, ainsi que l'incertitude sur son intensité et sur sa trajectoire. Le but d'un tel système de prévision d'ensemble serait de donner une valeur à cette incertitude. Il serait activé « à la demande », dans le cas où la situation est propice à la survenue d'une tempête.

Finalement, les présents travaux proposent un nouveau point de vue sur la représentation des champs météorologiques dans lesquels des structures cohérentes existent et ont un rôle important sur la dynamique. Plutôt que de les échantillonner sur une grille ou par un ensemble de fonctions spectrales, on a vu l'intérêt de les projeter sur des fonctions localisées à la fois spatialement et spectralement. Une telle approche pourrait se généraliser à d'autres champs que le tourbillon potentiel, à d'autres échelles ou dans d'autres domaines que la météorologie. En restant à l'échelle synoptique, la recherche de structures cohérentes dans le champ d'humidité et de son lien avec les structures de tourbillon potentiel permettrait d'apporter une vision de la cyclogenèse qui ne soit pas limitée à ses aspects adiabatiques. Une autre application de la représentation en ondelettes pourrait être développée pour la simulation numérique. La définition d'une grille adaptative qui serait affinée là où il y a des structures cohérentes, fronts et autres phénomènes intenses de petite échelle, permettrait d'améliorer leur simulation, ainsi que de prendre en compte leur rétroaction sur la plus grande échelle, y compris dans les modèles climatiques.

1. Solitons et modons

Le formalisme mathématique de la propagation des ondes provient de l'optique avant de s'étendre à d'autres domaines comme la mécanique des fluides.

Si on considère un milieu (ou état de base) dans lequel évoluent des ondes de fréquence ω et de nombre d'onde k , il existe une relation de dispersion :

$$\omega = \omega(k) ,$$

qui donne les vitesses de phase et de groupe de chaque onde

$$c_\phi = \frac{\omega(k)}{k} , \quad c_g = \frac{d\omega(k)}{dk} .$$

Si la vitesse de phase dépend du nombre d'onde, alors le milieu est dispersif. Un paquet d'onde de taille initiale finie s'étend alors au cours du temps, en se développant en amont et en aval.

C'est le cas des ondes de Rossby.

Un soliton est un paquet d'onde qui ne se disperse pas. Pour qu'un soliton existe, il faut que le paquet d'onde soit soumis à des équations non linéaires, la dispersion étant alors contrebalancée par les non-linéarités. Le soliton est un phénomène bien connu en optique non linéaire. Dans un milieu optique linéaire, l'indice de réfraction est indépendant des ondes électromagnétiques qui s'y propagent. Dès que l'on s'intéresse à des ondes très intenses, le paquet d'onde modifie les propriétés diélectriques du milieu, et donc son indice de réfraction. En hiérarchisant les effets physiques de l'onde sur son milieu, il est possible d'étudier les diverses propriétés de propagation non linéaires. L'apparition des solitons est une conséquence d'un de ces effets non linéaire.

Malguzzi et Malanotte-Rizzoli (1984), repris par Hakim (2000) montre un cadre analytique permettant des paquets d'ondes de Rossby qui soient des solitons. Partant de l'équation barotrope non divergente

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + J(\psi, \zeta) + \beta \frac{\partial \psi}{\partial x} = 0 , \quad (5.1)$$

on écrit l'écoulement comme la somme d'un état de base zonalement uniforme et d'une perturbation de faible amplitude séparable en (x, y) :

$$\psi(x, y) = \bar{\psi}(y) + \Psi(x)\phi(y) .$$

Au premier ordre, pour que la solution de (5.1) soit stationnaire, il faut que la perturbation Ψ satisfasse l'équation de Korteweg-deVries :

$$\frac{\partial \Psi}{\partial x} + a_1 \Psi \frac{\partial \Psi}{\partial x} + a_2 \frac{\partial^3 \Psi}{\partial x^3} = 0, \quad (5.2)$$

qui a pour solution

$$\Psi(x) = \text{sign}(a_1, a_2) A \text{sech}^2 \left(\frac{x}{W} \right).$$

Pour qu'il y ait des solitons de Rossby, il suffit donc d'avoir des non-linéarités faibles. Si les ondes suivent une évolution fortement non linéaire, il y a possibilité de modon. Il s'agit d'un dipôle de vortacité qui ne s'amplifie pas et ne change pas de forme au cours du temps. Il est stable, ou faiblement instable.

2. Test de normalité

Pour tester la normalité (le caractère Gaussien) d'un échantillon de données, il est classique de calculer la *Skewness* et la *Kurtosis* de la distribution, qui dépendent respectivement des moments d'ordre 2, 3 et 4. Leur définition est :

$$S = \frac{m_3}{m_2^{3/2}} \quad , \quad K = \frac{m_4}{m_2^2} \quad ,$$

avec m_k le moment centré d'ordre k de la distribution. La Skewness représente l'asymétrie de la distribution autour de sa moyenne, et la Kurtosis mesure l'importance des queues de distribution. Pour une loi normale, la $S = 0$ et $K = 3$. Si on obtient des valeurs proches de celles-ci, on accepte souvent la normalité de la distribution testée.

Au moyen d'un test statistique, il est possible déterminer des intervalles de confiance pour l'égalité de la Skewness à 0 et de la Kurtosis à 3. Cela permet d'évaluer la significativité du test de normalité.

Soit $\{x_i, i = 1..N\}$ l'échantillon, de taille N . On définit ses moments centrés empiriques d'ordre k par :

$$\mu_k = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (x_i - m)^k \quad ,$$

où m est la moyenne de l'échantillon.

On peut montrer que les statistiques centrées réduites d'une distribution Gaussienne sont telles que :

$$S_N = \sqrt{\frac{N}{6}} \left(\frac{m_3}{m_2^{3/2}} \right) \xrightarrow{N \rightarrow \infty} \mathcal{N}(0, 1)$$

$$K_N = \sqrt{\frac{N}{24}} \left(\frac{m_4}{m_2^2} - 3 \right) \xrightarrow{N \rightarrow \infty} \mathcal{N}(0, 1)$$

Ainsi, on peut définir un intervalle de confiance pour ces scores. On acceptera l'hypothèse de normalité de la distribution à 95% si les valeurs absolues des scores centrés réduits sont inférieures à 1,96.

Remarque : ces deux tests sont parfois rassemblés sous la forme $(S_N + K_N)$, qui doit suivre une loi du $\chi^2(2)$.

3. Orthogonalisation des structures : cas d'une matrice non inversible

Rappelons que calcul de l'orthogonal s_k^\perp de la structure s_k se fait par la recherche des coefficients $\{\alpha_i, 1 \leq i \leq k-1\}$ tels que :

$$s_k^\perp = s_k - \sum_{i=1}^{k-1} \alpha_i s'_i$$

et

$${}^t\mathbf{SS} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_{k-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \langle s'_i, s'_j \rangle \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_{k-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \langle s_k, s'_1 \rangle \\ \vdots \\ \langle s_k, s'_{k-1} \rangle \end{pmatrix} = {}^t\mathbf{S}s_k$$

Les coefficients α_i s'obtiennent par inversion de la matrice ${}^t\mathbf{SS}$. Cette annexe vise à traiter le cas où ${}^t\mathbf{SS}$ n'est pas inversible. Dans ce cas, il ne sera pas possible d'obtenir la relation d'orthogonalité. Il s'agit donc de s'approcher de l'orthogonalité autant que possible, tout en perturbant au minimum la structure initiale.

Étant symétrique, ${}^t\mathbf{SS}$ peut être diagonalisée. Si elle n'est pas inversible, alors elle a au moins une valeur propre nulle. Pour commencer, supposons que la valeur propre nulle est unique. Dans ce cas, on peut écrire :

$${}^t\mathbf{SS} = \mathbf{PD} {}^t\mathbf{P} = \mathbf{P} \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{D}' \end{pmatrix} {}^t\mathbf{P}$$

où \mathbf{P} est une matrice de passage orthogonale et \mathbf{D}' est une matrice diagonale inversible.

La résolution se fait donc en inversant \mathbf{D}' , mais il demeure une indétermination sur le vecteur propre nul de \mathbf{D} . Ce problème revient à chercher le scalaire x telle que :

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_{k-1} \end{pmatrix} = \mathbf{P} \begin{pmatrix} x & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{D}'^{-1} \end{pmatrix} {}^t\mathbf{P} \begin{pmatrix} \langle s_k, s'_1 \rangle \\ \vdots \\ \langle s_k, s'_{k-1} \rangle \end{pmatrix}$$

aboutisse à un résultat respectant au mieux les contraintes.

Plaçons cette égalité dans l'expression de s_k^\perp :

$$s_k^\perp = s_k - \mathbf{S} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_{k-1} \end{pmatrix} = s_k - \mathbf{SP} \begin{pmatrix} x & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{D}'^{-1} \end{pmatrix} {}^t\mathbf{P} {}^t\mathbf{S}s_k$$

On décompose \mathbf{P} entre p_1 sa première colonne qui est le vecteur propre nul de ${}^t\mathbf{SS}$, et \mathbf{P}' :

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} p_1, 0, \dots, 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{P}' \end{pmatrix},$$

ce qui permet d'écrire :

$$s_k^\perp = s_k - x\mathbf{S}(p_1 \ ^t p_1) \ ^t \mathbf{S} s_k - \mathbf{S} \mathbf{P}' \mathbf{D}'^{-1} \ ^t \mathbf{P}' \ ^t \mathbf{S} s_k$$

Cette expression montre que le choix de x n'est pas anodin pour la définition de s_k^\perp . Cependant, quel que soit x , la valeur du produit scalaire de s_k^\perp avec ses prédécesseurs s_1, \dots, s_{k-1} sera la même. Par conséquent, puisque x n'agit pas sur l'orthogonalité, comme le montre la multiplication par $^t \mathbf{S}$ de l'expression précédente, il ne reste plus que la contrainte de la distance minimale $\|s_k - s_k^\perp\|$. Pour satisfaire cette contrainte, il faut fixer $x = 0$.

Le raisonnement qui vient d'être proposé pour une matrice ayant une valeur propre nulle simple se généralise à des valeurs propres multiples. x devient alors un vecteur dont la taille est la dimension du noyau de $^t \mathbf{S} \mathbf{S}$. D'après ce qui précède, ce vecteur doit être nul.

Bibliographie

- Arbogast, P., K. Maynard, and F. Crepin, 2008 : Ertel potential vorticity inversion under an “implicit balance” condition. *Quart. J. Roy. Meteor. Soc.*, page accepted.
- Arbogast, P. *L'inversion du tourbillon potentiel : méthodologie, application à l'étude des interactions non-linéaires dans la formation des dépressions météorologiques*. PhD thesis, Doctorat de l'Université P. Sabatier, Toulouse, 1998. 229pp.
- Arbogast, P., 2004 : Frontal wave development by interaction between a front and a cyclone : application to the FASTEX IOP 17. *Quart. J. Roy. Meteor. Soc.*, **130**, 1675–1696.
- Ayrault, F. Suivi automatique des tourbillons sur l'Atlantique Nord. Master's thesis, D.E.A. Université P. Sabatier, Toulouse, 1995.
- Ayrault, F. *Environnement, structure et évolution des dépressions météorologiques : réalité climatologique et modèles types*. PhD thesis, Doctorat de Université P. Sabatier, Toulouse, 1998. 328pp.
- Ayrault, F., and A. Joly, 2000 : Une nouvelle typologie des dépressions météorologiques : classification des phases de maturation. *Compte-Rendus à l'Académie des Sciences, Sciences de la Terre et des planètes*, **330**, 167–172.
- Azzalini, A., M. Farge, and K. Schneider., 2005 : Nonlinear wavelet thresholding : A recursive method to determine the optimal denoising threshold. *Appl. Comput. Harm. Anal.*, **18**, 177–185.
- Baehr, C., B. Pouponneau, F. Ayrault, and A. Joly, 1999 : Dynamical characterization and summary of the FASTEX cyclogenesis cases. *Quart. J. Roy. Meteor. Soc.*, **125**, 3469–3494.
- Barkmeijer, J., R. Buizza, and T. N. Palmer, 1999 : 3D-var Hessian singular vectors and their potential use in the ECMWF Ensemble Prediction System. *Quart. J. Roy. Meteor. Soc.*, **125**, 2333–2351.
- Batchelor, G. K., 1969 : Computation of the energy spectrum in homogeneous two-dimensional turbulence. *Phys. Fluids Suppl., II*, **12**, 233–239.
- Bergé, P., Y. Pomeau, and C. Vidal. *L'ordre dans le chaos*. Editeurs des sciences et des arts, Paris, 1988. 354 pp.
- Bjerknes, J., 1919 : On the structure of moving cyclones.. *Geofys. Publikasjoner*, **1**, 1.

- Bjerknes, J., 1937 : Theorie der aussertropischen Zyklonenbildung. *Meteorologische Zeitschrift*, **12**, –.
- Bjerknes, J. *Extratropical cyclones*, volume Compendium of Meteorology, pages 577–598. American Meteorological Society, 1951.
- Bjerknes, J., and J. Holmboe, 1944 : On the theory of cyclones. *J. Meteorol.*, **1**, 1–22.
- Bjerknes, J., and H. Solberg, 1922 : Life cycle of cyclones and the polar front theory of atmospheric circulation. *Geofys. Publikasjoner*, **3**, 1.
- Bjerknes, V., J. Bjerknes, N. Solberg, and T. Bergeron. *Physikalische Hydrodynamic mit anwendung auf die dynamische Meteorologie*. Springer-Verlag OHG, 1933. Berlin.
- Chaigne, E., and P. Arbogast, 2000 : Multiple potential vorticity inversions in two FASTEX cyclones.. *Quart. J. Roy. Meteor. Soc.*, **126**, 1711–1734.
- Charney, J. G., 1947 : The dynamics of long waves in a baroclinic westerly current. *J. Meteor.*, **4**, 135–162.
- Charney, J. G., 1955 : The use of primitive equations of motion in numerical prediction. *Tellus*, **7**, 22–26.
- Charney, J. G., 1971 : Geostrophic turbulence. *J. Atmos. Sci.*, **28**, 1087–1095.
- Charney, J. G., R. Fjørtoft, and J. von Neumann, 1950 : Numerical integration of the barotropic vorticity equation. *Tellus*, **2**, 237–254.
- Chassaing, P. *Turbulence en mécanique des fluides*. Cépaduès Editions, Toulouse, 2000.
- Chen, Y., and C. Snyder, 2007 : Assimilating vortex position with an ensemble Kalman filter. *Mon. Wea. Rev.*, **135**, 1828–1845.
- Cocquerez, J.-P., and S. Philipp. *Analyse d'images : filtrage et segmentation*. Masson, Paris, 1997.
- Cohen, A., I. Daubechies, and P. Vial, 1993 : Wavelets on the interval and fast wavelet transforms. *J. of Appl. and Comput. Harmonic Analysis*, **1**, 54–81.
- Coifman, R. R., and D. Donoho. *Translation-invariant denoising*, volume Wavelets and Statistics, pages 125–150. Springer-Verlag, 1995.
- Courtier, P., C. Freydier, J. Geleyn, F. Rabier, and M. Rochas. The ARPEGE project at Météo-France. In *ECMWF Seminar Proceedings*, pages 193–231, Reading, 9–13 sept. 1991 1991. Volume II.
- Cunningham, P., and D. Keyser, 2004 : Dynamics of jet-streaks in a stratified quasi-geostrophic atmosphere : steady-state representations. *Quart. J. Roy. Meteor. Soc.*, **130**, 1579–1609.

- Daubechies, I., 1988 : Orthonormal bases of compactly supported wavelets. *Commun. on Pure and Appl. Math.*, **41**, 909–996.
- Davis, C., 1992 : Piecewise potential vorticity inversion. *J. Atmos. Sci.*, **49**(16), 1397–1411.
- Davis, C., and K. Emanuel, 1991 : Potential vorticity diagnostics of cyclogenesis. *J. Atmos. Sci.*, **119**, 1929–1953.
- Descamps, L., D. Ricard, A. Joly, and P. Arbogast, 2007 : Is a real cyclogenesis case explained by generalized linear baroclinic instability ? *J. Atmos. Sci.*, **64**(12), 4287–4308.
- Donoho, D. L., 1993 : Unconditional bases are optimal bases for data compression and for statistical estimation. *Appl. Comput. Harm. Anal.*, **1**(1), 100–115.
- Donoho, D. L., and I. M. Johnstone, 1994 : Ideal spatial adaptation by wavelet shrinkage. *Biometrika*, **81**(3), 425–455.
- Doswell, C., C. Ramis, R. Romero, and S. Alonso, 1998 : A diagnostic study of three heavy precipitation episodes in the western Mediterranean region. *Weather and Forecasting*, **13**, 102–124.
- Ducrocq, V., O. Nuissier, D. Ricard, C. Lebeaupin, and T. Thouvenin, 2008 : A numerical study of three catastrophic precipitating events over southern France. Part II : Mesoscale triggering and stationarity factors. *Quart. J. Roy. Meteor. Soc.*, **134**, 131–145.
- Ducrocq, V., D. Ricard, J. Lafore, and F. Orain, 2002 : Storm-scale numerical rainfall prediction for five precipitating events over france : on the importance of the initial humidity field. *Weather and Forecasting*, **17**, 1236–1256.
- Eady, E., 1949 : Long-waves and cyclone waves. *Tellus*, **1**(3), 33–52.
- Ertel, H., 1942 : Ein neuer hydrodynamischer Wirbelsatz. *Meteorologische Zeitschrift*, **59**, 271–281.
- Espy, J. *The philosophy of storms*. 1841.
- Farge, M., 1992 : Wavelet transforms and their applications to turbulence. *Annu. Rev. Fluid Mech.*, **24**, 395–457.
- Farge, M., and T. Philipovitch. *Coherent structure analysis and extraction using wavelets*, volume Progress in wavelet analysis and applications, page 477. Frontières, Gif-sur-Yvette, 1993.
- Farge, M., K. Schneider, and N. Kevlahan, 1999 : Non-gaussianity and coherent vortex simulation for two-dimensional turbulence using an adaptive orthogonal wavelet basis. *Phys. Fluids*, **11**(8), 2187–2201.

- Farrell, B., 1985 : Transient growth of damped baroclinic waves. *J. Atmos. Sci.*, **42**(24), 2718–2727.
- Farrell, B., 1989 : Optimal excitation of baroclinic waves. *J. Atmos. Sci.*, **46**(9), 1193–1206.
- Farrell, B., and P. Ioannou, 1996a : Generalized stability theory. Part I : autonomous operators.. *J. Atmos. Sci.*, **53**(14), 2025–2040.
- Farrell, B., and P. Ioannou, 1996b : Generalized stability theory. Part II : nonautonomous operators.. *J. Atmos. Sci.*, **53**(14), 2041–2053.
- Fehlmann, R., C. Quadri, and H. Davies, 2000 : An alpine rainstorm : sensitivity to the mesoscale upper-level structure. *Weather and Forecasting*, **15**, 4–28.
- Freedden, W., and M. Schreiner, 1998 : Orthogonal and nonorthogonal multiresolution analysis, scale discrete and exact fully discrete wavelet transform on the sphere. *Constructive Approximation*, **14**(4), 493–515.
- Froude, L., L. Bengtsson, and K. Hodges, 2007 : The predictability of extratropical storm tracks and the sensitivity of their prediction to the observing system. *Mon. Wea. Rev.*, **135**, 315–333.
- Guérin, R., G. Desroziers, and P. Arbogast, 2006 : 4D-Var analysis of potential vorticity pseudo-observation. *Quart. J. Roy. Meteor. Soc.*, **132**, 1283–1298.
- Haines, K., and P. Malanotte-Rizzoli, 1991 : Isolated anomalies in westerly jet streams : a unified approach. *J. Atmos. Sci.*, **48**(4), 510–526.
- Hakim, G. J., 2000 : Climatology of coherent structures on the extratropical tropopause. *Mon. Wea. Rev.*, **128**(2), 385–406.
- Hakim, G. J., D. Keyser, and L. Bosart, 1995 : The Ohio valley wave-merger cyclogenesis event of 25–26 january 1978. Part II : diagnosis using quasigeostrophic potential vorticity inversion. *Mon. Wea. Rev.*, **124**, 2176–2205.
- Hamill, T. M., C. Snyder, and R. E. Morss, 2000 : A comparison of probabilistic forecasts from bred, singular-vector, and perturbed observation ensembles. *Mon. Wea. Rev.*, **128**, 1835–1851.
- Hodges, K., 1994 : A general method for tracking analysis and its application to meteorological data. *Mon. Wea. Rev.*, **122**(11), 2573–2586.
- Hodges, K., 1995 : Feature tracking on the unit sphere. *Mon. Wea. Rev.*, **123**, 3458–3465.
- Hodges, K., 1999 : Adaptive constraints for feature tracking. *Mon. Wea. Rev.*, **127**, 1362–1373.
- Hodyss, D., and T. R. Nathan, 2004 : The connection between coherent structures and low-frequency wave packets in large-scale atmospheric flow. *J. Atmos. Sci.*, **61**(21), 2616–2626.

- Hoffman, R., and E. Kalnay, 1983 : Lagged average forecasting, an alternative to Monte Carlo forecasting. *Tellus*, **35A**, 100–118.
- Holton, J. *An introduction to dynamic meteorology, 3rd Edition*. Academic Press, 1992. International Geophysics Series, Vol. 48, 511 pp.
- Hoskins, B. J., and F. P. Bretherton, 1972 : Atmospheric frontogenesis models : mathematical formulation and solution. *J. Atmos. Sci.*, **29**, 11–37.
- Hoskins, B. J., M. E. M. Intyre, and R. W. Robertson, 1985 : On the use and significance of isentropic potential vorticity maps. *Quart. J. Roy. Meteor. Soc.*, **111**, 877–946.
- Houtekamer, P. L., and H. L. Mitchell, 1998 : Data assimilation using an Ensemble Kalman Filter technique. *Mon. Wea. Rev.*, **126**(3), 796–811.
- Hussain, A. K. M. F., 1986 : Coherent structures – Reality and myth. *Phys. of Fluids*, **26**(10), 2816–2850.
- Jansà, A., A. Genoves, M. Picornell, J. Campins, R. Riosalido, and O. Carretero, 2001 : Western mediterranean cyclones and heavy rain. Part II : Statistical approach. *Meteorol. Appl.*, **8**, 43–56.
- Joly, A., 1995 : The stability of steady fronts and the adjoint method : non-modal frontal waves. *J. Atmos. Sci.*, **52**(17), 3082–3108.
- Joly, A., K. A. Browning, P. Bessemoulin, J. Cammas, G. Caniaux, J. Chalon, S. Clough, R. Dirks, K. A. Emanuel, L. Eymard, R. Gall, T. Hewson, P. Hildebrand, D. Jorgensen, F. La-laurette, R. Langland, Y. Lemaitre, P. Mascart, J. Moore, P. Persson, F. Roux, M. Shapiro, C. Snyder, Z. Toth, and R. Wakimoto, 1999 : Overview of the field phase of the Fronts and Atlantic Storm-Track Experiment (FASTEX) project. *Quart. J. Roy. Meteor. Soc.*, **125**, 3131–3164.
- Joly, A., and A. Thorpe, 1990 : Frontal instability generated by tropospheric potential vorticity anomalies. *Quart. J. Roy. Meteor. Soc.*, **116**, 525–560.
- Joly, B., O. Nuissier, V. Ducrocq, and A. Joly. Mediterranean synoptic-scale ingredients involved in heavy precipitations events triggering over southern France : a clustering approach. In *International Conference on Alpine Meteorology*, page 4p., 4-8 June 2007.
- Kleinschmidt, E., 1950a : Über Aufbau und Entstehung von Zyklonen, II Teil. *Met. Rundschau*, **3**, 54–61.
- Kleinschmidt, E., 1950b : Über Aufbau und Entstehung von Zyklonen, I Teil. *Met. Rundschau*, **3**, 1–6.
- Kleinschmidt, E., 1951 : Über Aufbau und Entstehung von Zyklonen, III Teil. *Met. Rundschau*, **4**, 89–96.

- Kolmogorov, A. N., 1941 : The local structure of turbulence in incompressible viscous fluid for very large Reynolds numbers. *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, **30**, 301–305.
- Kraichnan, R. H., 1967 : Inertial ranges in two-dimensional turbulence. *Phys. Fluids*, **10**, 1417–1423.
- Lacarra, J., and O. Talagrand, 1988 : Short-range evolution of small perturbations in a barotropic model. *Tellus*, **40A**, 81–95.
- Landau, L., 1944 : On the problem of turbulence. *Doklady Akademii Nauk SSSR*, **44**, 311–314.
- Leith, C. E., 1968 : Diffusion approximation for two-dimensional turbulence. *Phys. Fluids*, **11**, 671–673.
- Leith, C. E., 1984 : Minimum enstrophy vortices. *Phys. Fluids*, **27**(6), 1388–1395.
- Lesieur, M. *Turbulence et structures cohérentes dans les fluides*, volume Nonlinear partial differential equations and their applications, 11, pages 1898–1990. H. Brezis et J.L. Lions éditeurs, Pitman research notes in mathematics, 1990.
- Lorenz, E. N., 1963 : Deterministic nonperiodic flow. *J. Atmos. Sci.*, **20**, 130–141.
- Lorenz, E. N., 1965 : A study of the predictability of a 28-variable atmospheric model. *Tellus*, **17**, 321–333.
- Lorenz, E. N., 1984 : Irregularity : A fundamental property of the atmosphere. *Tellus*, **36A**, 98–110.
- Lynch, P., 1985 : Initialization using Laplace transforms. *Quart. J. Roy. Meteor. Soc.*, **111**, 243–258.
- Lynch, P., D. Giard, and V. Ivanovici, 1997 : Improving the efficiency of a digital filtering scheme for diabatic initialization. *Mon. Wea. Rev.*, **125**, 1976–1982.
- Machenhauer, B., 1977 : On the dynamics of gravity oscillations in a shallow water model with applications to normal mode initialization. *Beitr. Phys. Atmos.*, **50**, 253–271.
- Malardel, S. *Fondamentaux de météorologie*. Cépaduès Editions, 2005. 708p.
- Malardel, S., A. Joly, F. Courbet, and P. Courtier, 1993 : Non-linear evolution of ordinary frontal waves induced by low-level potential vorticity anomalies. *Quart. J. Roy. Meteor. Soc.*, **119**, 681–713.
- Malguzzi, P., and P. Malanotte-Rizzoli, 1984 : Nonlinear stationary Rossby waves on nonuniform zonal winds and atmospheric blocking. Part I : the analytical theory. *J. Atmos. Sci.*, **41**(17), 2620–2628.
- Mallat, S. *A wavelet tour of signal processing*. Academic Press, 1998. 637 pp.

- Mallat, S. *Une exploration des signaux en ondelettes*. Editions de l'Ecole Polytechnique, 2000. 654 pp.
- Margules, M., 1903 : Die energie der stürm. *Jahrbücher der K.-K. Zentralanstalt für Meteorologie und Erdmagnetismus*, pages 1–26.
- Margules, M., 1906 : Zur sturmtheorie. *Meteorologische Zeitschrift*, **23**, 481–497.
- Massacand, A., H. Wernli, and H. Davies, 1998 : Heavy precipitation on the Alpine southside : an upper-level precursor. *Geophys. Res. Lett.*, **25**, 1435–1438.
- McIntyre, M., and T. Palmer, 1984 : The ‘surf zone’ in the stratosphere. *J. Atmos. Terrest. Phys.*, **46**(9), 825–849.
- McWilliams, J., 1984 : The emergence of isolated coherent vortices in turbulent flow. *J. Fluid Mech.*, **146**, 21–43.
- Michel, Y., and F. Bouttier, 2006 : Automated tracking of dry intrusions on satellite and synthetic water vapour imageries. *Quart. J. Roy. Meteor. Soc.*, **132**, 2257–2276.
- Molteni, F., R. Buizza, T. N. Palmer, and T. Petroliaigis, 1996 : The ECMWF Ensemble Prediction System : methodology and validation. *Quart. J. Roy. Meteor. Soc.*, **122**, 73–119.
- Molteni, F., and T. N. Palmer, 1993 : Predictability and finite-time instability of the northern winter circulation. *Quart. J. Roy. Meteor. Soc.*, **119**, 269–298.
- Moore, G., and W. Peltier, 1987 : Cyclogenesis in frontal zones. *J. Atmos. Sci.*, **44**(2), 384–409.
- Moore, R. W., and M. T. Montgomery, 2004 : Reexamining the dynamics of short-scale, diabatic Rossby waves and their role in midlatitude moist cyclogenesis. *J. Atmos. Sci.*, **61**, 754–768.
- Mureau, R., F. Molteni, and T. N. Palmer, 1993 : Ensemble prediction using dynamically conditioned perturbations. *Quart. J. Roy. Meteor. Soc.*, **119**, 299–323.
- Newhouse, S., D. Ruelle, and F. Takens, 1978 : Occurrence of strange axiom-A attractors near quasi-periodic flows on T^m , $m \geq 3$. *Communications in Mathematical Physics*, **64**, 35.
- Nuissier, O., V. Ducrocq, D. Ricard, C. Lebeaupin, and S. Anquetin, 2008 : A numerical study of three catastrophic precipitating events over southern France. Part I : Numerical framework and synoptic ingredients. *Quart. J. Roy. Meteor. Soc.*, **134**, 111–130.
- Obukhov, A. M., 1941 : On the distribution of energy in the spectrum of turbulent flow. *Dokl. Akad. Sci. Nauk SSSR*, **32**(A), 22–24.
- Orlanski, I., 1968 : Instability of frontal waves. *J. Atmos. Sci.*, **25**, 178–200.
- Palmén, E., and C. Newton, 1948 : A study of the mean wind and temperature distribution in the vicinity of the polar front in winter. *J. Meteorol.*, **5**, 220–226.

- Parker, D. J., and A. J. Thorpe, 1995 : Conditional convective heating in a baroclinic atmosphere : a model of convective frontogenesis. *J. Atmos. Sci.*, **52**(10), 1699–1711.
- Petitot, J. *Forme*, volume Encyclopaedia Universalis, pages 712–728. Paris, 1996.
- Petterssen, S., 1955 : A general survey of factors influencing development at sea level. *J. Meteor.*, **12**, 36–42.
- Petterssen, S. *Weather analysis and forecasting*, volume I. McGraw-Hill, 1956. 428pp.
- Petterssen, S., and S. Smebye, 1971 : On the development of extratropical cyclones. *Quart. J. Roy. Meteor. Soc.*, **97**, 457–482.
- Plu, M., and P. Arbogast, 2005 : A cyclogenesis evolving into two distinct scenarios and its implications for short-term ensemble forecasting. *Mon. Wea. Rev.*, **133**(7), 2016–2029.
- Pyle, M. E., D. Keyser, and L. F. Bosart, 2004 : A diagnostic study of jet streaks : kinematic signatures and relationship to coherent tropopause disturbances. *Mon. Wea. Rev.*, **132**(1), 297–319.
- Rayleigh, L., 1880 : On the stability, or instability, of certain fluid motions. *Proc. Lond. Math. Soc.*, **11**, 57–70.
- Ricard, D. *Initialisation et assimilation de données à méso-échelle pour la prévision à haute résolution des pluies intenses de la région Cévennes-Vivarais*. PhD thesis, Université Paul Sabatier – Toulouse III, 2002.
- Riehl, H., and Collaborators. Forecasting in mid-latitudes. Technical Report 5, Meteor. Monogr., 1952. 80p.
- Rivière, G., and A. Joly, 2006 : Role of the low-frequency deformation field on the explosive growth of extratropical cyclones at the jet exit. Part II : baroclinic critical region. *J. Atmos. Sci.*, **63**(8), 1982–1995.
- Robert, R., and C. Rosier, 2001 : Long range predictability of atmospheric flows. *Nonlinear Processes in Geophysics*, **8**, 55–67.
- Robert, R., and J. Sommeria, 1991 : Statistical equilibrium states for two-dimensional flows. *J. Fluid Mech.*, **229**, 291–310.
- Rosca, D., 2005 : Locally supported rational spline wavelets on a sphere. *Math. Comp.*, **74**, 1803–1829.
- Rossby, C. G., 1939 : Relation between variations in the intensity of the zonal circulation of the atmosphere and the displacements of the semi-permanent centers of action.. *J. Marine Res.*, **2** (1), 38–55.

- Rossby, C. G., 1940 : Planetary flow patterns in the atmosphere. *Quart. J. Roy. Meteor. Soc.*, **66**, Suppl., 68–87.
- Ruelle, D., and F. Takens, 1971 : On the nature of turbulence. *Commun. math. Phys.*, **20**, 167–192.
- Sanders, F., 1986 : Explosive cyclogenesis over the west-central North Atlantic ocean, 1981–1984. Part I : composite structure and mean behaviour.. *Mon. Wea. Rev.*, **114**, 1781–1794.
- Sanders, F., and J. Gyakum, 1980 : Synoptic-dynamic climatology of the “bomb”. *Mon. Wea. Rev.*, **108**, 1589–1606.
- Schär, C., and H. C. Davies, 1990 : An instability of mature cold front.. *J. Atmos. Sci.*, **47**(8), 929–950.
- Schär, C., and H. Wernli, 1993 : Structure and evolution of an isolated semi-geostrophic cyclone. *Quart. J. Roy. Meteor. Soc.*, **119**, 57–90.
- Schröder, P., and W. Sweldens. Spherical wavelets : efficiently representing functions on the sphere. In *Proceedings of the 22nd annual conference on Computer graphics and interactive techniques*, pages 161–172, New York, 1995.
- Schubert, W., S. Hausman, M. Garcia, K. Ooyama, and H. Kuo, 2001 : Potential vorticity in a moist atmosphere. *J. Atmos. Sci.*, pages 3148–3157.
- Schwierz, C., S. Dirren, and H. C. Davies, 2004 : Forced waves on a zonally aligned jet stream. *J. Atmos. Sci.*, **61**(1), 73–87.
- Simmons, A. J., and B. J. Hoskins, 1979 : The downstream and upstream development of unstable baroclinic waves. *J. Atmos. Sci.*, **36**, 1239–1254.
- Snyder, C., 1999 : Error growth in flows with finite-amplitude waves or coherent structures. *J. Atmos. Sci.*, **56**(4), 500–506.
- Snyder, C., and A. Joly, 1998 : Development of perturbations within growing baroclinic waves. *Quart. J. Roy. Meteor. Soc.*, **124**, 1961–1983.
- Solberg, H., 1928 : Integrationen der atmosphärischen Störungsgleichungen. *Geofys. Publ.*, **5**, 9.
- Sutcliffe, R. C., 1939 : Cyclonic and anticyclonic development. *Quart. J. Roy. Meteor. Soc.*, **65**, 518–524.
- Sutcliffe, R., 1947 : A contribution to the problem of development. *Quart. J. Roy. Meteor. Soc.*, **73**, 370–383.
- Takayabu, I., 1991 : Coupling development : an efficient mechanism for the development of extratropical cyclones. *J. Met. Soc. Japan*, **69**(6), 609–628.

- Thorncroft, C. D., and B. J. Hoskins, 1990 : Frontal Cyclogenesis. *J. Atmos. Sci.*, **47**(19), 2317–2336.
- Thorncroft, C. D., B. J. Hoskins, and M. McIntyre, 1993 : Two paradigms of baroclinic-wave life-cycle behaviour. *Quart. J. Roy. Meteor. Soc.*, **119**, 17–55.
- Toth, Z., and E. Kalnay, 1993 : Ensemble forecasting at NMC : the generation of perturbations. *Bull. Amer. Meteor. Soc.*, **74**, 2317–2330.
- Townsend, A. *The structure of turbulent shear flow*. University Press, Cambridge, 1956.
- Uccellini, L. W. *Processes contributing to the rapid development of extratropical cyclones*, volume Extratropical cyclones, Newton and Holopainen eds, page chapter 6. American Meteorological Society, 1990.
- Vautard, R., 1990 : Multiple weather regimes over the North-Atlantic : analysis of precursors and successors. *Mon. Wea. Rev.*, **118**, 2056–2081.
- von Helmholtz, H., 1888 : Über atmosphärische Bewegungen I.. *Sitzungsberichte Akad. Wissenschaften Berlin*, **3**, 647–663.
- Wernli, H., S. Dirren, M. A. Liniger, and M. Zillig, 2002 : Dynamical aspects of the life cycle of the winter storm 'Lothar' (24-26 December 1999). *Quart. J. Roy. Meteor. Soc.*, **128**, 405–429.
- Wernli, H., and C. Schwierz, 2006 : Surface cyclones in the ERA40 dataset (1958-2001). Part I : novel identification method and global climatology. *J. Atmos. Sci.*, **63**, 2486–2507.
- Wernli, H., and T. Sprengler, 2007 : Identification and ERA-15 climatology of potential vorticity streamers and cutoffs near the extratropical tropopause. *J. Atmos. Sci.*, **64**, 1569–1586.
- Williams, G., and J. Robinson, 1974 : Generalized Eady waves with Ekman pumping. *J. Atmos. Sci.*, **31**, 1768–1776.
- Yano, J. I., P. Bechtold, J.-L. Redelsperger, and F. Guichard, 2004a : Wavelet-compressed representation of deep moist convection. *Mon. Wea. Rev.*, **132**(6), 1472–1486.
- Yano, J. I., R. Blender, C. Zhang, and K. Fraedrich, 2004b : 1/f noise and pulse-like events in the tropical atmospheric surface variabilities. *Quart. J. Roy. Meteor. Soc.*, **130**(600), 1697–1722.
- Ziehmann, C., 2000 : Comparison of a single-model EPS with a multi-model ensemble consisting of a few operational models. *Tellus*, **52**, 280–299.

THE NUMERICAL AND MATHEMATICAL REPRESENTATION OF THE METEOROLOGICAL SYNOPTICAL-SCALE COHERENT STRUCTURES

Author : Matthieu PLU

Defended on the 24th of January 2008 at the Centre National de Recherches Météorologiques,
42 Ave. G. Coriolis, 31057 TOULOUSE Cedex, France

Abstract

The meteorological synoptic-scale phenomena may be explained by the nonlinear interactions between some finite-amplitude structures and their large-scale environment. This framework of study does not rely on the hardly justifiable hypotheses of the instability theories, but it requires to be able to represent in an objective manner the coherent structures, named like this by analogy with turbulent flows.

The main purpose of this thesis is to build and to assess an algorithm of extraction of the synoptic-scale coherent structures. They are sought only in the field of potential vorticity, which is invertible in the dry atmosphere. The inversion yields the attribution of the other dynamical fields to the structure. The extraction relies on the projection of two-dimensional fields on a set of orthogonal wavelet bases. An optimal basis is associated with every structure. In order to avoid any redundancy between the structures, a technique of orthogonalization has been set. The comparison of the extraction with a non-objective method is made possible by a new definition of the temporal coherence, that relies on the independance of the evolution of the environment.

The extraction has been applied to a large set of synoptic-scale phenomena : a high-frequency upper-level precursor, a jet-streak, and some upper-level fields associated with intense precipitating events in the Mediterranean. These studies help to show the dynamical consistency of the extracted structures, and to identify some possible applications of the algorithm. Its potential use for the short-term ensemble forecast of storms is also tackled.

Keywords

Dynamical meteorology, cyclogenesis, coherent structures, predictability, wavelets.

REPRÉSENTATION NUMÉRIQUE ET MATHÉMATIQUE DES STRUCTURES MÉTÉOROLOGIQUES COHÉRENTES D'ÉCHELLE SYNOPTIQUE

Doctorat de l'Université de Toulouse délivré par l'Université Toulouse III - Paul Sabatier

Discipline : Physique de l'atmosphère

Auteur : Matthieu PLU

Directeur de thèse : Philippe ARBOGAST

Thèse soutenue le 24 janvier 2008 au Centre National de Recherches Météorologiques, 42 Av.
G. Coriolis, 31057 TOULOUSE Cedex, France

Résumé

Les phénomènes météorologiques d'échelle synoptique peuvent s'expliquer par les interactions non linéaires entre structures d'amplitude finie, et leur environnement. Ce cadre d'étude, qui ne repose pas sur les hypothèses difficilement justifiables des théories d'instabilité, nécessite de pouvoir représenter de façon objective ces structures cohérentes, nommées ainsi par analogie avec les écoulements turbulents.

L'objectif principal de cette thèse est de bâtir et d'évaluer un algorithme d'extraction des structures cohérentes d'échelle synoptique. Elles sont recherchées dans le seul champ de tourbillon potentiel, qui est inversible dans l'atmosphère sèche. L'attribution des autres champs dynamiques à la structure est ainsi rendue possible après inversion. L'extraction repose sur la projection des champs bidimensionnels sur un ensemble de bases d'ondelettes orthogonales. Une base optimale est associée à chaque structure ; pour éviter la redondance entre les structures, une technique d'orthogonalisation a été mise au point. La comparaison de l'extraction avec une méthode non objective est possible grâce à un nouveau critère de cohérence temporelle, qui repose sur l'indépendance de l'évolution de l'environnement.

L'extraction est appliquée à un ensemble de phénomènes d'échelle synoptique : un précurseur d'altitude haute-fréquence, un rapide de courant-jet, et des champs d'altitude associés à des épisodes fortement précipitants en Méditerranée. Ces études permettent de montrer la pertinence dynamique des structures extraites, et de dégager des perspectives d'utilisation de l'algorithme. On aborde aussi sa possible application à la mise en place d'une prévision d'ensemble à courte échéance des tempêtes.

Mots-clés

Météorologie dynamique, cyclogenèse, structures cohérentes, prévisibilité, ondelettes.

Centre National de Recherches Météorologiques, Unité GAME du CNRS

Météo-France

42 Av. G. Coriolis

31057 TOULOUSE Cedex, France